Optimiza 12

LIBRO 2
Toma de decisiones y teoría de juegos

Ing. Alejandro Roberti

Ing. Gustavo Chijani — Ing. Verónica Esain — Ing. Esteban Gidekel

Optimiza12
Libro 2
Toma de Decisiones y Teoría de Juegos

Ing. Alejandro Roberti
Ing. Gustavo Chijani – Ing. Verónica Esaín — Ing. Esteban Gidekel
2019

.

Diseño de portada: aero@optimiza.org

Versión digital disponible (e-book) http://optimiza.org

ÍNDICE

Introducción

Esta publicación forma parte de la Serie Optimiza 12 y aborda el tema de toma decisiones y los fundamentos básicos de la teoría de juegos, desde el enfoque clásico de von Neuman hasta una descripción de los siguientes aportes, como el de Nash.

La propuesta es ofrecer al estudiante de las carreras de ingeniería un concepto general de estos temas en el marco conceptual de la investigación operativa desde el punto de vista de sus necesidades y expectativas profesionales.

La experiencia docente a lo largo de los años indica que es necesario este tipo de enfoque en la formación del ingeniero, el cual, si bien es riguroso, debería diferenciarse de la metodología y la profundidad que quizá sea necesario para la formación de economistas.

La obra está dividida en cuatro capítulos (numerados siguiendo el orden establecido en el LIBRO 1), donde se comienza con una descripción de tomas de decisiones bajo incertidumbre y bajo riesgo con las herramientas computacionales que pueden ayudar en la materia y luego se avanza a teoría clásica de juegos y una descripción de juegos multinivel y juegos cooperativos.

Junio 2019

Capítulo 9.
Toma de decisiones

Problemas clásicos de decisión

Entendemos por toma de decisiones a nivel individual al proceso mediante el cual una persona elige una entre varias opciones para lograr un objetivo determinado, haciendo uso de su razonamiento y pensamiento para dicha opción; es decir, la capacidad de logro individual tomando decisiones con ese específico motivo.

En la toma de decisiones importa la elección de un camino a seguir, por lo que en un estado anterior deben evaluarse alternativas de acción. Sin estas, no existirá decisión. Para tomar una decisión, cualquiera que sea su naturaleza, es necesario conocer, comprender y analizar un problema, para así poder darle solución. En algunos casos cotidianos, este proceso se realiza de forma implícita, pero existen otros en los cuales las consecuencias de una mala o buena elección pueden tener repercusiones en la vida y, si es en un contexto laboral, en el éxito o fracaso de la organización. En esos casos resulta necesario realizar un proceso más estructurado que puede dar más seguridad e información para resolver el problema.

Tanto en el mundo de la política como en el empresarial o en ámbitos militares, el momento de decidir entre varias alternativas posibles, quién toma esa decisión, en base a que elementos la toma y con qué fines lo hace, constituye la base temática de lo que se desarrolla en este capítulo. Se trata de encontrar modelos de optimización en teoría de la toma de decisiones, que, generalmente, se construyen a partir de las características de la información disponible.

Las decisiones en el ámbito institucional

Según diversos autores [Robbins (1999), Hellriegel, Slocum (2004), Stoner, (2003)], la toma de decisiones es una parte importante de la labor de la dirección de una institución o empresa. A pesar de ello, cuando se toma una decisión o cuando el costo de buscar y evaluar las alternativas es bajo, el modelo racional proporciona una pobre descripción del proceso llevado a cabo. En el ámbito organizacional, las mayorías de las decisiones significativas se realizan mediante el juicio, más que por un modelo prescriptivo definido.

Se puede establecer un panorama de cómo se toman realmente la mayoría de las decisiones en las organizaciones, a través de la caracterización de tres modelos de toma de decisión: el racional, el de racionalidad limitada y el político. Ellos ayudan a identificar la complejidad y variedad de las situaciones para la toma de decisiones.

En las organizaciones en general y en las empresas en particular suele existir una jerarquía que determina el tipo de acciones que se realizan dentro de ella y, en consecuencia, el tipo de decisiones que se deben tomar, la técnica administrativa divide a la empresa en 3 niveles jerárquicos:

Conforme se sube en la jerarquía de una organización, la capacidad para tomar decisiones no programadas o no estructuradas adquiere más importancia, ya que son este tipo de decisiones las que atañen a esos niveles. Por tanto, la mayor parte de los programas para el desarrollo de personal directivo pretenden mejorar sus habilidades para tomar decisiones no programadas, por regla general enseñándoles a analizar los problemas en forma sistemática y a tomar decisiones lógicas.

A medida que se baja en esta jerarquía, las tareas que se desempeñan son cada vez más rutinarias, por lo que las decisiones en estos niveles serán más programadas.

Las decisiones también serán diferentes, en función de en qué unidad funcional o departamento tengan lugar.

En este contexto, existen entonces, tres modelos básicos para la toma de decisiones. Ellos son:

1) **Modelo Racional.** Se basa en construir un proceso de elección entre alternativas para maximizar los beneficios. Incluye una definición del problema, recopilación y análisis de los datos, y cuidadosa evaluación de las alternativas. Los criterios de evaluación de alternativas son bien conocidos y supone que el intercambio de información entre individuos es objetiva y precisa.

   Se basa en tres suposiciones explícitas:
   - Toda la información relacionada con las alternativas está disponible.
   - Se pueden clasificar las alternativas.
   - La alternativa seleccionada brinda la máxima ganancia posible.

   Y una suposición implícita: “No existen dilemas éticos en el proceso de toma de decisiones”.

   Tiene las siguientes limitaciones:
   - Puede requerir bastante tiempo.
   - Puede requerir uso importante de recursos humanos.
   - Se necesitan datos difíciles de obtener.

2) **Modelo de Racionalidad Limitada**: apunta a las limitaciones del anterior. Explica la razón por la que diferentes personas toman decisiones distintas cuando cuentan exactamente con la misma información. Refleja tendencias individuales o de equipo para seleccionar una solución que no sea la mejor o no poder buscar soluciones alternativas.

3) **Modelo Político:** toma de decisiones de las personas para satisfacer sus propios intereses. Las preferencias basadas en metas personales egocéntricas rara vez cambian conforme se adquiere nueva información. Por tanto, la

definición de los problemas, la búsqueda y recopilación de datos, el intercambio de información y los criterios de evaluación son sólo métodos utilizados para predisponer el resultado a favor del que toma la decisión. Las decisiones reflejan la efectividad de las tácticas usadas por directivos y empleados según las consecuencias de ellas. Este modelo predomina en las organizaciones en todo el mundo, prevaleciendo por encima de los dos anteriores.

Modelos para tomas de decisiones en función de la información

Las decisiones se deben tomar en un contexto, lo que se denomina "condiciones ambientales", las que se pueden clasificar con diferentes criterios. Si las clasificamos según los datos o información que disponemos, son tres:

Certeza: En este caso, se tiene información exacta, medible y confiable acerca del resultado de cada una de las alternativas consideradas, y las opciones de solución que se planteen van a causar siempre resultados conocidos e invariables. Al tomar la decisión sólo se debe pensar en la opción que genere mayor beneficio. En un escenario de certeza o certidumbre, el tomador de decisiones posee plena información sobre el problema, las soluciones alternativas son obvias y los posibles resultados de cada decisión son claros. En estas condiciones, es posible prever e incluso controlar los hechos y resultados al disponer de un adecuado conocimiento y una clara definición tanto del problema como de las soluciones alternativas. En este contexto, la toma de decisiones es relativamente fácil. El responsable de la toma de decisión elige la solución que aporte el mejor resultado potencial. No obstante, no hay que olvidar que un problema puede tener muchas posibles soluciones, y calcular los resultados esperados de todas ellas puede ser extremadamente lento y costoso. Este escenario es el vigente en los capítulos dedicados a programación lineal.

Riesgo: Se podría definir riesgo como la probabilidad de que ocurra un suceso, impacto o consecuencia, sea adversa o favorable. En la toma de decisiones bajo riesgo tenemos información completa para solucionar el problema y de las posibles soluciones, pero no tenemos la capacidad de diagnosticar con certeza el resultado de alguna alternativa, aun contando con suficiente información como para prever la probabilidad que tenga para lograr un estado de cosas deseado.

En este tipo de decisiones, las posibles opciones de solución tienen cierta probabilidad conocida de generar un resultado o se puede usar probabilidad subjetiva para estimar el posible resultado. La probabilidad objetiva es la posibilidad de que ocurra un resultado basándose en hechos concretos, puede ser cifras de años anteriores o estudios realizados para este fin. En la probabilidad subjetiva se determina el resultado basándose en opiniones y juicios personales e individuales. Los principales criterios de decisión empleados sobre tablas de decisión en ambiente de riesgo son:

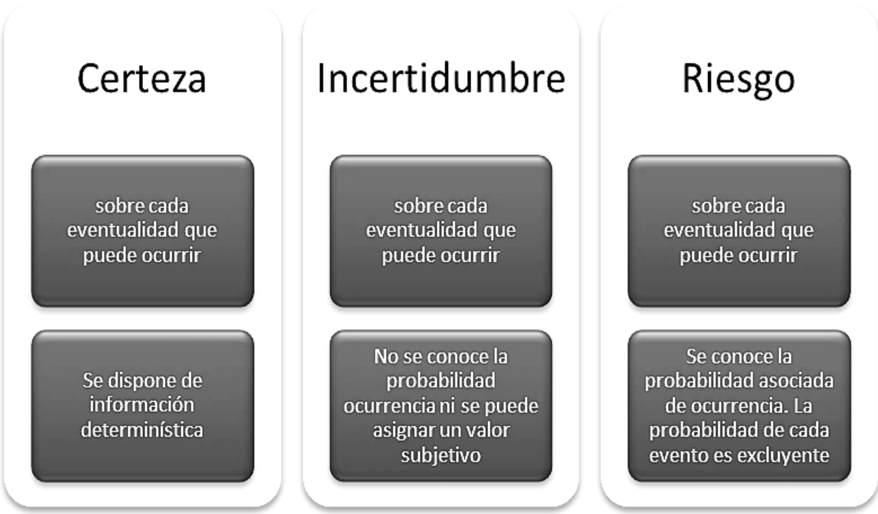
- Criterio del valor esperado
- Criterio de mínima varianza con media acotada
- Criterio de la dispersión
- Criterio de la probabilidad máxima

Incertidumbre: No contamos con información adecuada para tomar la decisión, se plantea en escenarios de situaciones sin control, se pueden evaluar diferentes soluciones, pero no se les puede asignar probabilidad. Hay dos clases de incertidumbre:

- **Estructurada**: No se sabe qué puede ocurrir entre diferentes opciones, pero sí se conoce qué puede ocurrir entre varias posibilidades.

- **No estructurada**: No se sabe qué puede ocurrir ni las probabilidades para las posibles soluciones, es decir, se desconoce totalmente lo que puede ocurrir en un caso determinado.

En resumen, desde el punto de vista de las características de la información disponible se podrán clasificar los modelos utilizados para la toma de decisiones en tres grandes grupos:



En el caso de RIESGO debe tenerse en cuenta que se sabe que

$$\sum_{j=1}^{n} P(N_j) = 1$$

donde N_j son estados cuya probabilidad de ocurrencia es mutuamente excluyente.

Para construir un modelo de toma de decisiones se comienza por ordenar la información en una matriz de posibilidades, en donde A_i representa la decisión a tomar o las acciones o alternativas a seguir ante la posible ocurrencia de un evento, N_i. Estos eventos, o alternativas que pueden tomar las condiciones externas, son los distintos estados posibles o estados de la naturaleza. b_{ij} son los resultados de tomar una acción para cada estado (por ejemplo, b_{21} es el resultado de haber decidido hacer A_2 y lo que ocurrió fue N_1).

Estos resultados se expresan de diferente manera, según el objetivo planteado. Por ejemplo, en términos económicos, pueden ser los beneficios asociados a cada par A_i ; N_j .

A_i **N_j**	N_1	N_2	...	N_n
A_1	b_{11}	b_{12}		b_{1n}
A_2	b_{21}	b_{22}		b_{2n}
...				
A_m	b_{m1}	b_{m2}		bmn

Ejemplo:
Una empresa considera la posibilidad de incorporar una nueva caldera, sobre la base de tres posibilidades: Grande (G), Mediana (M) o Chica (C). El éxito o fracaso de la inversión depende de las condiciones económicas de la próxima temporada, que pueden ser: MUY BUENAS, BUENAS, REGULARES o MALAS. Un asesor económico estima los beneficios que se pueden obtener según qué decisión de compra se tome y lo que pueda ocurrir con las condiciones económicas esperadas. Presenta sus estimaciones en una matriz de beneficios:

A_i \ N_j	Muy buena	Buena	Regular	Mala
G	2,5	0	–2,5	–4,1
M	1,6	0,3	–1,2	–2,1
C	0,6	0,4	–0,3	–0,3
NADA	–0,4	0	0	0

Como no son conocidas las probabilidades para cada N_j ni resulta oportuno inventarlas subjetivamente lo resolveremos con alguno de los **modelos para condiciones de incertidumbre** que desarrollamos a continuación.

Modelos para condiciones de incertidumbre

La serie de modelos que sigue está presentada en orden cronológico, siguiendo la línea histórica en que fueron propuestos. Los últimos, entonces, son los que hoy más se emplean. Presentados de esta manera, tenemos la oportunidad de comparar los resultados y, eventualmente, combinar algunos de ellos.

Criterio de Wald (MAXIMIN), (Pesimista)

Se basa en buscar el mínimo beneficio asociado a cada acción y recomendar la acción que tenga el máximo de esos mínimos ("***haga lo que haga, va a salir mal, por tanto, haré aquello que me perjudique menos***"):

$$\Omega = \max_i (\min_j (b_{ij}))$$

	MIN
G	–4,1
M	–2,1
C	–0,3
NO	–0,4

Como el máximo de estos mínimos es – 0,3, corresponde recomendar comprar la más pequeña. Este método, en la práctica, no se utiliza en acciones contra la naturaleza.

Criterio MAXIMAX, (Optimista)

Es el opuesto al de Wald: se buscan los máximos asociados a cada decisión posible, y se recomienda la acción que corresponde al máximo de todos ellos ("***haga lo que haga, va a salir bien, por tanto, haré aquello que más me beneficie***"):

$$\mathbf{\Omega = max_i\ (max_j\ (b_{ij}))}$$

	MAX
G	2,5
M	1,6
C	0,6
NO	0

Por consiguiente, se recomendará la acción asociada con 2,5 que es comprar la caldera grande.

Criterio de Hurwicz

Viendo que existían dos criterios tan antagónicos como los anteriores, Hurwicz[1] postuló que el correcto debería ser una combinación de ellos, suponiendo que el tomador de decisiones tiene una intuición sobre la calidad de sus pronósticos, que equivale a la confianza en su propio criterio. Hurwicz dice que para cada decisión existe un cierto grado de optimismo. Por ello, introduce un coeficiente de optimismo ω y se define, para cada acción una función de Hurwicz (H) ("***tengo una confianza ω en que todo va a salir bien, por tanto, voy a elegir lo más de lo que puede salir bien y lo menos de lo que puede salir mal***")

$$H_i = \omega\ MAX + (1 - \omega)\ MIN$$

luego seleccionaremos el máximo de estos H_i. Por ejemplo, si establecemos que ω = 0,4,

[1] Leonid Hurwicz fue un economista y matemático estadounidense de origen polaco. Académicamente se reconoce por sus investigaciones en diseño de mecanismos y en teoría de la compatibilidad de incentivos. Ambas son utilizadas en economía, sociología y ciencias políticas. Hoy se utilizan los modelos que desarrolló para analizar y comprender las interacciones entre instituciones e individuos, así como para estudiar el funcionamiento de los mercados. (Fte. Wikipedia)

$$H_1 = 0{,}4 * 2{,}5 + (1 - 0{,}4) * -4{,}1 = -1{,}46$$
$$H_2 = 0{,}4 * 1{,}6 + (1 - 0{,}4) * -2{,}1 = -0{,}62$$
$$H_3 = 0{,}4 * 0{,}6 + (1 - 0{,}4) * -0{,}3 = 0{,}06$$
$$H_4 = 0{,}4 * 0{,}0 + (1 - 0{,}4) * -0{,}4 = -0{,}24$$
$\Omega = \max_i H_j = 0{,}06$ (recomienda la acción 3)

Criterio de Savage[2], (Minimax)

Es el criterio de aplicación. Se basa en que, al definir qué es lo que interesa, (por ejemplo, ganar lo más posible) se asume que, para cada acción posible de ser tomada – al ser aleatoria la ocurrencia de estados de la natura – cuanto mayor sea el beneficio en el éxito, tanto mayor será el costo en el fracaso. Savage plantea que lo que interesa es que después que todo pase, quien decide no tenga que lamentarse por la decisión tomada, o, al menos, lamentarse lo menos posible. Con este objetivo definió una función monetaria: el arrepentimiento.

En el problema: supongamos que compramos la caldera C y luego ocurre que en la naturaleza se da MUY BUENA. Se ganó 0,6 pero lo mejor hubiera sido, para ese estado de la natura (MUY BUENA), una caldera grande. Así se establece una diferencia, la cual resulta de plantear cuánto hubiese ganado de haber tomado la decisión correcta meno cuanto efectivamente gané por haber tomado la decisión que tomé. De esta manera, Savage denomina "*arrepentimiento*" a esa la diferencia:

Arrepentimiento = Máximo beneficio posible – lo realmente ganado

Como vamos a tener un arrepentimiento distinto para cada uno de los estados de la natura, con cada una de esas diferencias, podemos construir una ***matriz de arrepentimientos*** arr_{ij}:

A_i \ N_j	Muy buena	Buena	Regular	Mala
G	0	0,4	2,5	4,1
M	0,9	0,1	1,2	2,1
C	1,9	0	0,3	0,3
NADA	2,9	0,4	0	0

[2] Leonard Savage fue un matemático estadounidense especializado en estadística. Su obra más conocida Fundamentos de estadística es de 1954 introduce elementos sobre la teoría de la decisión y la subjetividad de la utilidad esperada estableciendo las bases de la inferencia bayesiana y sus aplicaciones a la teoría de juegos. Fue ayudante de von Neumann. Muchas de las teorías de Savage se aplican actualmente en diversos campos de la matemática financiera. (Fte. Wikipedia)

luego, debemos elegir el mínimo de los máximos arrepentimientos:

$$\Omega = \min_i (\max_j (arr_{ij}))$$

	MAX arr
G	4,1
M	2,1
C	1,9
NO	2,9

Comprobamos que corresponde a la acción 3, comprar la caldera chica. Este criterio es el que normalmente se utiliza en la práctica, a veces incluso si disponemos de las probabilidades de que ocurran los estados de la natura (Riesgo — ver más adelante).

Ejemplo

Se decide lanzar al mercado un producto que tiene un costo de 32 y se recibe por él 47. No se sabe nada sobre la demanda, salvo que hay una demanda mínima de 200 unidades y además se sabe que la planta puede producir desde ese mínimo de 200 unidades hasta un máximo de 2000. Las demandas insatisfechas no provocan pérdidas

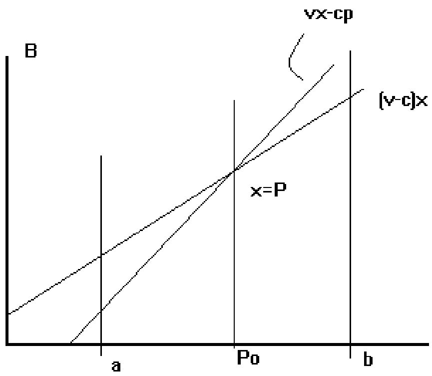
Comenzaremos por construir una matriz con el beneficio correspondiente a cada unidad producida (P), desde 200 hasta 2000 y a cada unidad demandada (x), desde 200 a 2000:

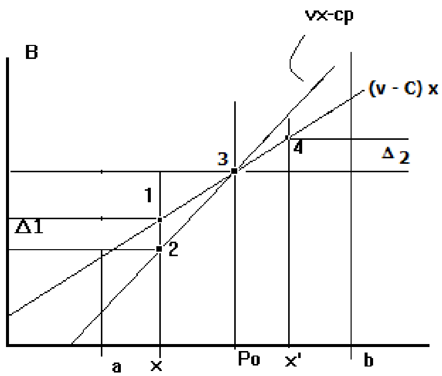
P / ***X***	200	201	...	2000
200	3000	3000		3000
201	2968	3015		3015
...				
2000	–54600	–54553		30000

como resulta una tabla muy compleja, nos conviene reescribir todo en forma de ecuación. Así tendremos dos ecuaciones posibles correspondientes a las dos situaciones que pueden ocurrir, que la demanda (x) es menor que lo producido (P) o que es mayor:

$$x \leq P \qquad B = vx - cP$$
$$x > P \qquad B = (v - c)\, P$$

Si luego graficamos ambas curvas:





El punto 1 es el mejor acto cuando $x = P$
El punto 2 es la realidad de $x < P$, luego, Δ_1 es el arrepentimiento para este caso
El punto 3 es el mejor acto.
El punto 4 es la realidad y Δ_2 es el arrepentimiento de este caso

Fijado un arrepentimiento a la derecha y a la izquierda, se tiene

$$x \leq P \quad Ar_1 = (v - c)\, x - (vx - cP) = c\,(P - x) \qquad (\Delta_1)$$
$$x > P \quad Ar_2 = (v - c)\, x - (v - c)\, P = (v - c)(x - P) \qquad (\Delta_2)$$

Se observa que hay arrepentimientos máximos en los extremos **a** y **b**. Si vamos cambiando los valores de P entre **a** y **b**, cuando el arrepentimiento por derecha sea igual al arrepentimiento por izquierda, es que hemos encontrado el óptimo.

$$c\,(P - a) = (v - c)\,(b - P)$$
$$32\,(P - 200) = (47 - 32)\,(2000 - P)$$
$$P = 774$$

Despejando, encontramos el P óptimo.

Modelos para condiciones de riesgo

Se aplican cuando se conocen las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza, el criterio empleado es el de máximo beneficio esperado, consiste en calcular la esperanza matemática del beneficio de cada acción y elegir aquella que lo maximiza.

Planteamos nuevamente la matriz inicial, a la que agregamos la columna de las esperanzas matemáticas, ***E(B),*** y la fila de las probabilidades ***P(x_j)***:

$P_{(xj)} \rightarrow$	0,2	0,2	0,4	0,2	
$N_j \rightarrow$ $A_i \downarrow$	**Muy buena**	**Buena**	**Regular**	**Mala**	**E(B)**
Grande G	2,5	0	–2,5	–4,1	–1,32
Mediana M	1,6	0,3	–1,2	–2,1	–0,52
Chica C	0,6	0,4	–0,3	–0,3	0,02
NADA	–0,4	0	0	0	–0,08

$$E(B) = \sum_j^n P(x_j) b_{ij}$$

$$\Omega = \max E(B_{ij})$$

El máximo de las ***E(B)*** es 0,02, asociado con la compra de una caldera pequeña. Si se trabajara con arrepentimientos se deben calcular los

$$E(Arr) = \sum P(x_j) Arr_{ij}$$

$$\Omega = \min E(Arr_{ij})$$

Predicción de los estados de la naturaleza.

Resultaría interesante poder contratar a alguien que sea capaz de predecir el futuro. En ese caso habría un cambio en las decisiones que debemos tomar. Veremos qué ocurriría en ese caso. En nuestra terminología, lo que estamos planteando es lo mismo que decir que podemos saber cuál es el subíndice j que prevalecerá en los N_j estados posibles.

Obviamente la "capacidad de predicción del futuro" varía desde el extremo de la no predicción hasta la predicción perfecta (o, en términos realistas, la predicción más confiable). La predicción se perfecciona con investigación, por lo tanto, aparece un costo asociado a la predicción: este costo aumenta con el grado de perfección, pues aumenta la necesidad de investigación asociada con ese grado de perfección.

Lo primero que haremos será definir el beneficio que obtendríamos si contáramos con información si errores. Eso es, directamente, la esperanza matemática del beneficio máximo y lo llamamos ***Beneficio Eesperado con Información Perfecta (BEIP)***:

$$BEIP = \sum_j^n P(x_j) \max B_{ij}$$

De esta manera, podemos calcular para el caso que estamos siguiendo, su BEIP:

BEIP = 2,5 x 0,2 + 0,4 x 0,2 + 0 x 0,4 + 0 x 0,2 = 0,58

Si en este momento evaluamos la diferencia entre este beneficio esperado y el beneficio que calculamos con la información disponible, obtendremos un nuevo valor que nos resulta útil:

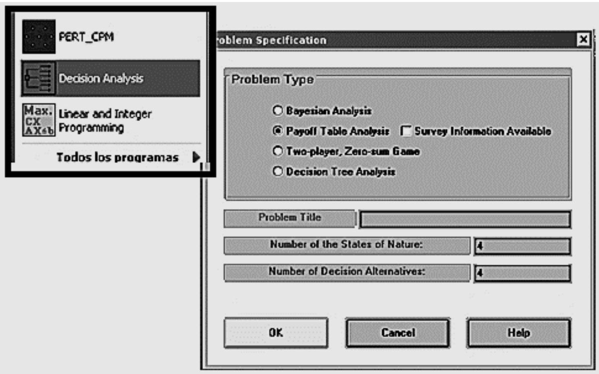
BEIP – $\max E(B_{ij})$ = VEIP

y que definimos como ***Valor Esperado con la Información Perfecta,*** que, en este caso, es:

0,58 – 0,02 = 0,56

interpretamos que esa diferencia que acabamos de hallar entre lo que se obtendríamos con el mejor pronóstico y lo que obtendríamos en las condiciones de partida, es el máximo que podríamos pagar por dicho pronóstico. En términos estadísticos, el VEIP es proporcional a la varianza.

Resolución del caso con WinQSB

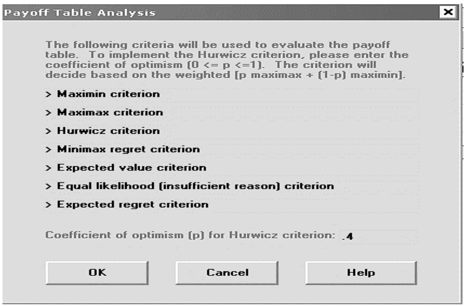


Para trabajar en estos modelos con WinQSB vamos a utilizar el módulo "*Decision Analysis*".

Seleccionamos "*New problem*" y completamos la pantalla de carga como se muestra en la figura.

La pantalla de carga incluye la posibilidad de ingresar las probabilidades de los estados de la natura y se pueden editar los nombres de esos estados y de las alternativas disponibles, para lo cual accederemos al menú "*Edit*…"

Decision \ State	Muy Buena	Buena	Regular	Mala
Prior Probability	0.2	0.2	0.4	0.2
Grande	2.5	0	-2.5	-4.1
Mediana	1.6	0.3	-1.2	-2.1
Chica	0.6	0.4	-0.3	-0.3
Nada	-0.4	0	0	0



Luego, al pedir la solución, aparece un resumen de los métodos que se usan más la solicitud de inclusión del coeficiente de optimismo ω de Hurwicz.

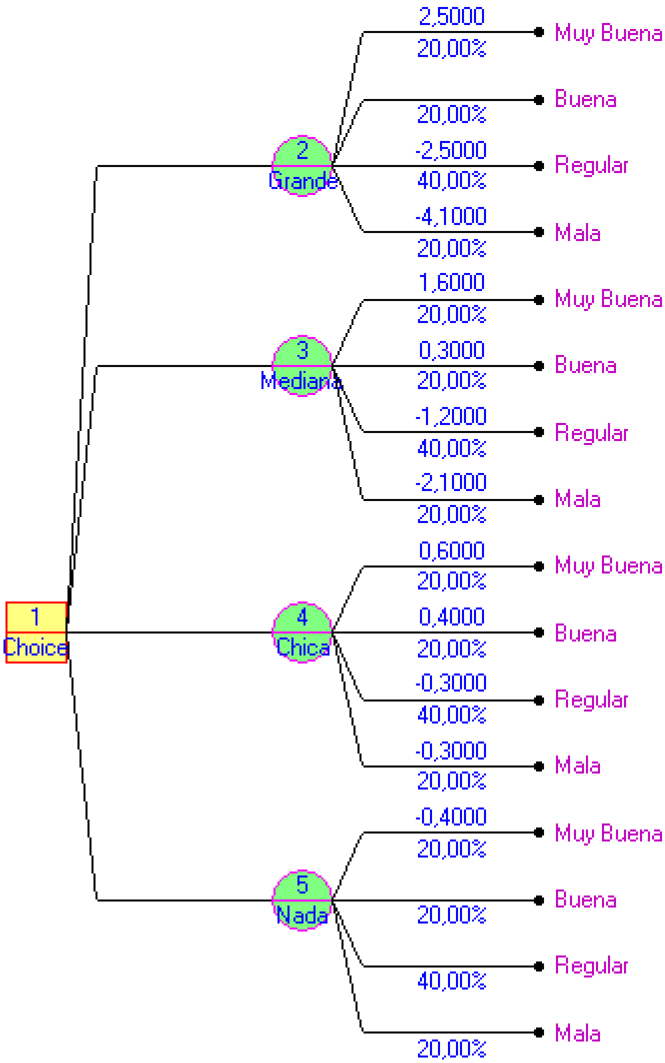
El resultado final del proceso lo podemos ver en la figura siguiente.

08-12-2010 Criterion	Best Decision	Decision Value	
Maximin	Chica	-0,30	
Maximax	Grande	2,50	
Hurwicz (p=0,4)	Chica	0,06	
Minimax Regret	Chica	1,90	
Expected Value	Chica	0,02	
Equal Likelihood	Chica	0,10	
Expected Regret	Chica	0,56	
Expected Value	without any	Information =	0,02
Expected Value	with Perfect	Information =	0,58
Expected Value	of Perfect	Information =	0,56

(De arriba abajo:

Maximin,
Maximax,
Hurwicz,
Mínimo Arrepentimiento,
Esperanza matemática,
Equiprobabilidad,
Esperanza de mínimo arrepentimiento,
Valor esperado sin información,
Valor esperado con Información Perfecta
VEIP, Valor esperado de la información perfecta)

También podremos obtener un árbol de decisiones:



Toma de decisiones bajo riesgo con variable continua.

En estos casos el criterio que se utiliza es el de máximo beneficio esperado. Para ello – tomado como un caso particular – es necesario calcular la esperanza matemática del beneficio para cada alternativa, trabajando bajo la hipótesis de que conocemos el modelo probabilístico al que puede ser ajustado el sistema.

Ejemplo

Una empresa proveedora de tecnología ha establecido un negocio para la instalación llave en mano de una planta procesadora de leche, por un monto de $ 600.000 con un plazo de entrega de 210 días.

La obra tiene un costo fijo de $ 330.000 y un costo variable de 500 $/día. En el contrato se establece una penalización de 2.500 $/día de atraso y un premio de 1.500 $/día de adelanto.

Se ha establecido que el tiempo medio de duración es μ = 195 días con σ = 25, siendo la variable aleatoria el tiempo de duración de la obra, con una distribución normal.

Debemos calcular el beneficio esperado.

x = tiempo de duración de la obra
μ = tiempo medio de duración de la obra = 195 días
σ = 25
plazo de entrega = 210 días

Para x ≤ 210

$$B = 600000 - 330000 - 500x + 1500\,(210 - x)$$

Para x > 210

$$B = 600000 - 330000 - 500x - 2500(x - 210)$$

que corresponde a

$$B = 585000 - 2000x \qquad \text{para } x \leq 210$$
$$B = 795000 - 3000x \qquad \text{para } x > 210$$

podremos hacer la integral de la porción de valores menores que 210 y de la porción mayor, con lo cual obtendríamos la Esperanza matemática de B:

$$E(B) = \int_{-\infty}^{210} (585000 - 2000x)\, f(x)dx + \int_{210}^{\infty} (795000 - 3000x)\, f(x)dx$$

$$E(B) = 585000\int_{-\infty}^{210} f(x)dx - 2000\int_{-\infty}^{210} xf(x)dx + 795000\int_{210}^{\infty} f(x)dx - 3000\int_{210}^{\infty} xf(x)dx$$

que puede ser escrita, reemplazando

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) = \Phi(z)$$

$$E(B) = 585000F(x) - 2000\int_{-\infty}^{210} xf(x)dx + 795000G(x) - 3000\int_{210}^{\infty} xf(x)dx$$

y tenemos la expresión de la esperanza matemática del beneficio. Aparece aquí una novedad: existe una variable de corte en la expresión funcional del beneficio, lo que da lugar a nuevas definiciones:

Expectativa Parcial Izquierda

$$\int_{-\infty}^{x} xf(x)dx = H(x)$$

Expectativa Parcial Derecha

$$\int_{x}^{\infty} xf(x)dx = J(x)$$

de manera tal que se cumple la condición

$$H(x) + J(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Luego

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

Si desarrollamos la integral y efectuamos cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = \mu + \sigma z$$

$$dx = \sigma dz \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$$

al resolver nos queda

$$H(x) = \mu\Phi(z) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

volviendo al cálculo de E(B)

$E_{(B)}$ = 585000 F(210) − 2000 H(210) + 795000 G(210) − 3000 J(210)

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{210-195}{25} = 0{,}6$$

$$\Phi(0{,}6) = F(210) = 0{,}7257$$

$$H(x) = H(210) = 195 \times 0{,}7257 - \frac{25}{\sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-0{,}6^2}{2}} = 133{,}18$$

$$J(210) = \mu - H(210) = 195 - 133{,}18 = 61{,}82$$

$$G(210) = 1 - F(210) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

$$E(B) = 190784$$

Optimización con demanda aleatoria

Para resolver estos casos, es necesario conocer el modelo de distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Como eso en general es difícil, suele ajustarse a una distribución conocida. Para períodos cortos de tratamiento la distribución puede ser gamma y para períodos largos normal.

Básicamente son necesarias dos tipos de informaciones:

1) INFORMACIÓN ECONÓMICA. Determinística.
   a) **c** Costo unitario
   b) **v** Precio de venta unitario
   c) **vR** Valor residual de las unidades sobrantes
   d) **cs** Costo de escasez de las unidades faltantes
2) INFORMACIÓN ESTADÍSTICA
   a) Modelo de distribución
      i) **μ**
      ii) **σ**

Se trata de hallar el óptimo con un concepto de decisión de máximo beneficio esperado.

Ejemplo 1

Se tiene un producto perecedero con demanda aleatoria, que tiene etiquetado un plazo de vida útil. Pasado el tiempo puede tener cierto valor residual diferente de cero. Tenemos que considerar que existe un costo de escasez. Debemos hallar la cantidad de producto óptima a fabricar, suponiendo un modelo normal de media μ y varianza σ.

Si el lote a producir es P, el problema consiste en hallar P con un criterio óptimo.

$$x \leq P \quad B = v_x - cP + v_R\ (P - x) = (v - v_R)\ x - (c - v_R)\ P$$
$$x > P \quad B = v_P - cx - cs\ (x - P) = (v\ c + cs)\ P - cs\ x$$

$$E(B) = \int_{-\infty}^{P} \left[(v - v_R)x - (c - v_R)P \right] f(x)dx + \int_{P}^{\infty} \left[(v - c + cs)P - csx \right] fxdx$$
$$E(B) = (v - v_R)H(P) - (c - v_R)PF(P) + (v - c + cs)P(1 - F(P)) - cs(\mu - H(P))$$
$$E(B) = y(P) \therefore \frac{dy(P)}{dP} = 0 \Rightarrow P = Poptimo \text{ si y solo si } \frac{dy(P)^2}{dP^2} < 0 \text{ dado que en P hay}$$
un maximo
$$\frac{dE(B)}{dP} = (v - v_R)H'(P) - \left[(c - v_R)PF'(P) + (c - v_R)F(P) \right] +$$
$$+ (v - c + cs)(1 - F(P)) - (vc + cs)PF'(P) + csH'(P)$$

pero como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$
$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow \frac{dH(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int xf(x)dx = xf(x)$$

resulta:

$$\frac{dE(B)}{dP} = (v - c + cs) - (v - v_R + cs)F(P) = 0$$
$$F(P) = \frac{(v - c + s)}{(v - v_R + cs)}$$
$$\frac{d^2E(B)}{dP^2} = -(v - v_R + cs)F'(P) < 0$$

luego P es óptimo, maximizando el beneficio esperado. Reemplazando F(P) en E(B)

$$maxE(B) = (v - v_R + cs)H(P) - cs\mu$$
$$donde$$
$$H(P) = \mu\Phi(z) - \frac{\sigma e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Para una distribución normal N. ¿Cuál es el mejor actor?
Cuando $x = P$, entonces $B = (v - c)\, x$
$E((v - c)x) = BEIP = v - c\ E(x) = (v - c)\mu$
$BEIP = (v - c)\mu$

Entonces:

$$VEIP = BEIP - E(B)$$
$$VEIP = (v - c)\mu - (v - v_R + cs)H(P) - cs\mu$$
$$VEIP = (v - c)\mu - \left[(v - v_R + cs)\left((\ )\mu\Phi(z) - \frac{\sigma e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \right] - cs\mu$$
$$VEIP = (v - v_R + cs)\frac{\sigma e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Si σ aumenta el *VEIP*: cuando mayor es la dispersión de la información mayor es el costo para pagar por ella

Ejemplo 2

Una panificadora desarrolla un nuevo producto a lanzar al mercado que tiene un costo unitario de 12 y un valor de venta de 20. Lo que no se vende se destina a pan rallado y tiene un valor de 8. La demanda sigue una distribución normal estable de σ = 3233 unidades y de μ = 22750 unidades semanales.

1. Determinar la cantidad óptima a producir semanalmente
2. El beneficio que arrojaría esa producción
3. El VEIP

$$F(P) = \frac{v - c + cs}{v - v_R - cs} = \frac{20 - 12}{20 - 8} = 0{,}66$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = \mu + \sigma z$$

$$F(P) = 0{,}66 = \Phi(z) \text{ por tabla z = 0,4316}$$

luego x = P_{opt} = 22750 + 0,4316 * 3233 = 24144 unidades

Capítulo 10. Investigación de mercados. Decisiones multinivel

Análisis de mercado.

Las técnicas de “análisis de mercado” se refieren a un conjunto de estudios, actividades y metodologías en el ámbito empresarial/institucional que tienen como objetivo brindarnos elementos de juicio sobre la viabilidad de una actividad determinada. Por eso, hemos incluido en este capítulo el punto de vista del impacto de las tomas de decisiones sobre esas técnicas

Valor esperado de la información de muestra.

Veremos un caso de toma de decisiones, en el cual, basándonos en la experiencia que tenemos sobre el negocio, podemos estimar las siguientes probabilidades de que un nuevo producto sea aceptado por el mercado: 0,4 para fracaso; 0,4 para éxito y 0,2 para un gran éxito. Para hacer el lanzamiento, debemos decidir entre una inversión Baja (B), Media (M) o Alta (A).

Utilizando el criterio probabilístico de la esperanza matemática llegaremos a la conclusión de que debe tomarse la decisión de hacer una inversión Media:

	RESULTADOS		
PROBABILIDAD→	**0,4**	**0,4**	**0,2**
DECISIÓN ↓	**FRACASO – F**	**ÉXITO – E**	**GRAN ÉXITO – G**
BAJA – B	–2	5	8
MEDIA – M	–5	10	12
ALTA – A	–8	6	15

Alternativa seleccionada: Inversión Media (M) con una ganancia esperada de $4,4

Podría ocurrir que la estimación de probabilidad cambie, lo que conduciría a una decisión distinta: si la nueva probabilidad de fracaso fuera 0,7, la de éxito 0,25 y la de gran éxito fuera 0,05, la decisión sería la de inversión Baja con una ganancia esperada de $ 0,25.

Como los cambios en las probabilidades producen cambios en la decisión y en la ganancia esperada, se entiende que la estimación de dichas probabilidades debe realizarse con la mayor precisión posible.

El análisis de mercado ofrece herramientas para la determinación más precisa posible de la probabilidad asociada a la toma de decisión. Obviamente esta herramienta tiene un costo de utilización que es el limitante.

Diseño de la investigación de mercados

El objetivo es encontrar un indicador o estimador del proyecto propuesto. Un indicador podría ser, por ejemplo, un puntaje de 1 a 10 que represente el grado de conveniencia del proyecto. También pueden ser Éxito, Fracaso, 0, 1, Favorable, Desfavorable, muy conveniente, poco conveniente, inconveniente, muy inconveniente, etc.

Supóngase que se establece un indicador de recomendación Favorable (**SF**) o Desfavorable (**NF**), que podemos definirlo –arbitrariamente– así:

INDICADOR	DEFINICIÓN
SF	Más del 10% del mercado objetivo acepta el producto
NF	Menos del 10% del mercado objetivo acepta el producto

El resultado de la investigación de mercado será uno de los dos indicadores y se utilizará para evaluar las probabilidades de modo tal que sea posible poder tomar una decisión. Sin embargo, puede haber resultados incorrectos, porque la investigación de mercado se realiza sobre una muestra aleatoria y no sobre todo el mercado objetivo. Por lo tanto, debemos saber cuál es el grado de confianza de la investigación realizada.

La investigación será confiable cuando sea pequeña la probabilidad de obtener el indicador equivocado (por ejemplo, se obtuvo el indicador NF y el producto resultó un éxito). Para ello cada investigación deberá ser contrastada con experiencias anteriores similares. Se elaboran tablas partiendo de ciertas deducciones:

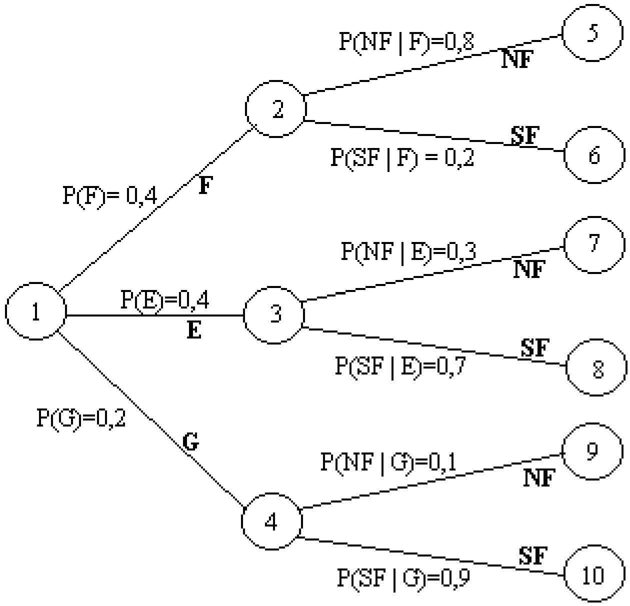
Si el producto va a ser un éxito, se cree que el 90% de las veces la investigación del mercado va a llegar al indicador SF, lo que es deseable, y se expresa así:

> *P(SF | G) = 0,90*
> *La probabilidad condicional de que se obtenga **SF** dado que el producto es un gran éxito es de 0,9*

de igual manera, la probabilidad condicional de que la investigación tenga como resultado el indicador **NF** si el producto es un fracaso será, por ejemplo, 0,80. La tabla ejemplo sería:

	RESULTADO		
	F	**E**	**G**
NF	0,8	0,3	0,1
SF	0,2	0,7	0,9

Con esta tabla podremos construir un árbol de probabilidades estructurado con nodos y arcos:



Ahora bien, supongamos que hacemos la investigación de mercado, con la cual tenemos la posibilidad de obtener dos resultados: Favorable (**SF**) o Desfavorable (**NF**). Deberíamos calcular las nuevas estimaciones de las probabilidades de cada resultado: por ejemplo, si el resultado es Favorable, **SF** ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea un fracaso?

Definiremos, entonces, "*probabilidades posteriores*" para cada caso:
Si el resultado es **SF**:

$$P(F \mid SF) = \frac{P(FySF)}{P(SF)}$$

$$P(E \mid SF) = \frac{P(EySF)}{P(SF)}$$

$$P(G \mid SF) = \frac{P(GySF)}{P(SF)}$$

Si el resultado es **NF**:

$$P(F \mid NF) = \frac{P(FyNF)}{P(NF)}$$

$$P(E \mid NF) = \frac{P(EyNF)}{P(NF)}$$

$$P(G \mid NF) = \frac{P(GyNF)}{P(NF)}$$

Donde el numerador es la ***Probabilidad conjunta***, que es la probabilidad de que se presente una pareja de resultado e indicador. Por ejemplo, la probabilidad conjunta de **F** y **SF** será

$$P(FySF) = P(SF \mid F) \times P(F) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$$

lo que significa que existe un 8% de probabilidades que el indicador sea Favorable y el producto sea un fracaso.

El denominador es la ***probabilidad marginal***, que es la suma de cada renglón de la tabla de probabilidades de indicadores de la Tabla 1:

P(NF)=0,32 + 0,12 + 0,02 = 0,46
P(SF)=0,08 + 0,28 + 0,18 = 0,54

Con estos parámetros se obtiene la ***probabilidad revisada*** de los resultados basados en la investigación de mercado:

Si la investigación resultó **NF**:

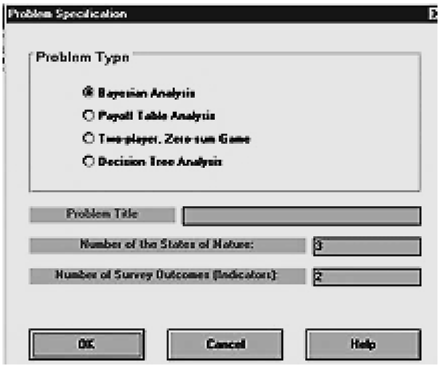
P(F|NF) = 0,69565
P(E|NF) = 0,26087
P(G|NF) = 0,04348

Si la investigación resultó **SF**:

P(F|SF) = 0,14815
P(E|SF) = 0,51852
P(G|SF) = 0,3333

Desarrollo en WinQSB

Hasta este punto el problema puede desarrollarse mediante el módulo *Análisis de decisiones* de WinQSB, donde seleccionamos la opción *Análisis Bayesiano*, con tres estados de la natura y dos indicadores en la pantalla de especificación del caso:



Al hacer clic en "OK" podremos comenzar a ingresar los datos en la tabla de carga.

abilities (Bayesian Analysis) for Decision Problem

0.4

Outcome \ State	F	E	G
Prior Probability	0.4	0.4	0.2
SF	0.8	0.3	0.1
NF	0.2	0.7	0.9

Luego con el menú *Resolver el Problema* podemos acceder a la ventana de probabilidades revisadas:

Posterior or Revised Probabilities for Decision Problem

Indicator\State	F	E	G
SF	0,6957	0,2609	0,0435
NF	0,1481	0,5185	0,3333

Si acedemos al menú *resultados* podremos obtener tres informes: a) las *Probabilidades marginales:*

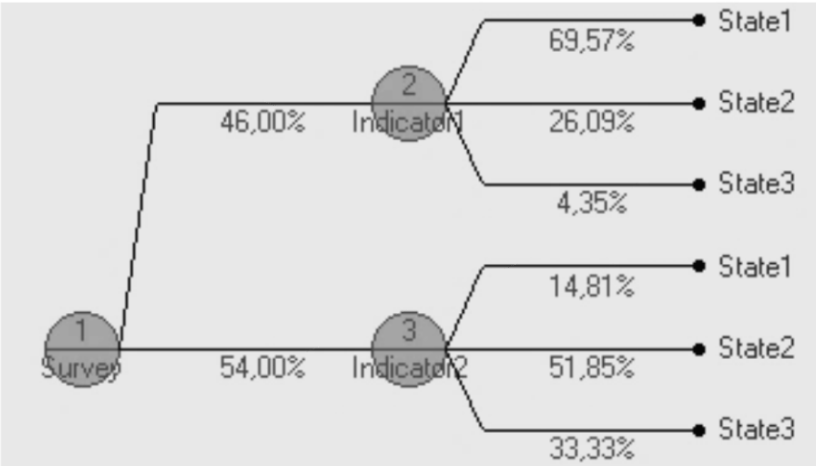
07-30-2002	Outcome or Indicator	Marginal Probability
1	SF	0,46
2	NF	0,54

b) las *Probabilidades conjuntas*:

oint Probabilities for Decision Problem

State\Indicator	SF	NF
F	0,32	0,08
E	0,12	0,28
G	0,02	0,18

c) al árbol de decisiones (tome nota de la diferencia con el árbol de probabilidades visto anteriormente):



El siguiente paso será identificar la decisión óptima:

a) Si la investigación de mercado resultó en el indicador **NF**:

DECISION	GANANCIA ESPERADA
Baja	0,69565 (–2) + 0,26087 (5) + 0,04348 (8) = 0,26089
Moderada	0,69565 (–5) + 0,26087 (10) + 0,04348 (12) = –0,34779
Alta	0,69565 (–8) + 0,26087 (6) + 0,04348 (15) = –3,34778

b) Si la investigación de mercado resultó en el indicador SF:

DECISIÓN	GANANCIA ESPERADA
Baja	0,14815 (–2) + 0,51852 (5) + 0,33333 (8) = 4,96294
Moderada	0,14815 (–5) + 0,51852 (10) + 0,33333 (12) = 8,44441
Alta	0,14815 (–8) + 0,51852 (6) + 0,33333 (15) = 6,92587

En el primer caso (a), la decisión óptima será la inversión baja y en el segundo, (b) la moderada.

Cuánto pagar por la investigación de mercado

Recordamos que el valor óptimo con Información Perfecta se calcula así:

Valor esperado de la Información de muestra	**=**	**ganancia esperada con la información de muestra**	**–**	**Ganancia esperada sin la información de muestra**

La ganancia esperada sin la información de muestra resulta, como ya vimos, igual a 4,4. Si queremos
calcular la ganancia esperada con la información de muestra, procederemos así:

Ganancia esperada con la información de muestra	**=**	**Ganancia esperada cuando el indicador es NF**	**x *P*(NF)**	**+**	**Ganancia esperada Cuando el indicador es SF**	**x *P*(SF)**

Lo que da:

Ganancia esperada con la información de muestra = 0,26089 x 0,46 + 8,44441 x 0,54 = 4,67999

Y se calcula el valor esperado de la información de muestra, así

Valor esperado de la información de muestra = 4,67982 — 4,4 = 0,27999.

Lo leemos de esta manera: *la ganancia esperada aumentará 0,27999 si se usan los resultados de la investigación de mercado: la empresa no debería gastar más de 0,27999 en hacer la investigación de mercado.*

Se define Eficiencia de la investigación de mercado (o información de muestra) η_{im}:

$$\eta_{im} = \frac{valorEsperadoDeLaInformaciónDeMuestra}{valorEsperadoDeLaInformaciónPerfecta}$$

que para este caso será:

$$\eta_{im} = \frac{0{,}2799}{1{,}8} \times 100 = 15{,}56$$

lo que significa que la información de muestra proporciona un valor del 15,56% del que se tendría de tener la información perfecta. Cuanto mayor sea el porcentaje, más útil es la investigación de mercado.

Árboles de decisión. Toma de decisiones multinivel.

Para desarrollar este tema seguiremos con el ejemplo anterior, y recordaremos la tabla original del problema

DECISIÓN ↓	RESULTADOS		
	FRACASO – F	**ÉXITO – E**	**GRAN ÉXITO – G**
PROBABILIDAD→	**0,4**	**0,4**	**0,2**
BAJA – B	–2	5	8
MEDIA – M	–5	10	12
ALTA – A	–8	6	15

Estos datos pueden resumirse en un árbol que comienza con un nodo cero que representa el momento en el cual se debe tomar la primera decisión: elegir una de las tres alternativas de inversión. Cada alternativa tiene tres resultados posibles. Así, el nodo cero conecta con el nodo 1, con el 2 y con el 3. Si se llegó al nodo 1, hay tres arcos, uno al nodo 4, otro al 5 y el último al 6.

Si, por ejemplo, queremos analizar el nodo 4, veremos que, si llegamos ahí, obtuvimos una "ganancia" de –2 (Inversión baja con resultado Fracaso). ¿Qué probabilidad hay de encontrarnos en esa situación?:

P(fracaso | inversión baja) = P (F|B) = 0,4.

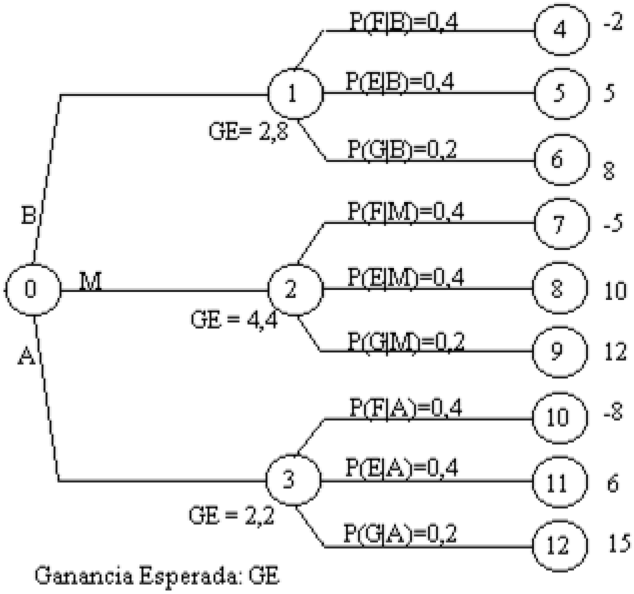
Para aprender a utilizar el árbol comenzaremos con calcular la ganancia esperada con cada alternativa de los nodos 1, 2 y 3. Por ejemplo:

Ganancia esperada (GE) en el nodo 1	**=**	**Ganancia esperada en el nodo 4**	**x**	**Probabilidad asociada con el Arco 1–4**	**+**	**Ganancia esperada en el Nodo 5**	**x**	**Probabilidad asociada con el Arco 1–5**	**+**	**Ganancia Esperada en el Nodo 6**	**x**	**Probabilidad asociada con el Arco 1–6**

Ganancia Esperada (GE) en el nodo 1	**=**	**–2**	**x**	**0,4**	**+**	**5**	**x**	**0,4**	**+**	**8**	**x**	**0,2**

Ganancia Esperada (GE) en el nodo 1	**= 2,8**

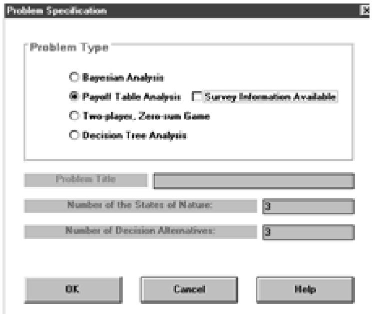
Luego incorporamos al árbol este valor, calculándolo para cada alternativa:



Allí deducimos que la mejor alternativa resulta ser la inversión moderada, que promete una ganancia de 4,4. Es un resultado congruente con los obtenidos anteriormente, ya que se usan los mismos cálculos. Sin embargo, este método nos permite pensar en tomas de decisiones más complejas, como aquellas en que las probabilidades de los resultados se ven afectadas por la decisión tomada.

Desarrollo en WinQSB:

Con WinQSB podemos seleccionar la opción *Análisis de Tabla de Pagos:*
y procedemos a cargar la tabla con los datos del problema.

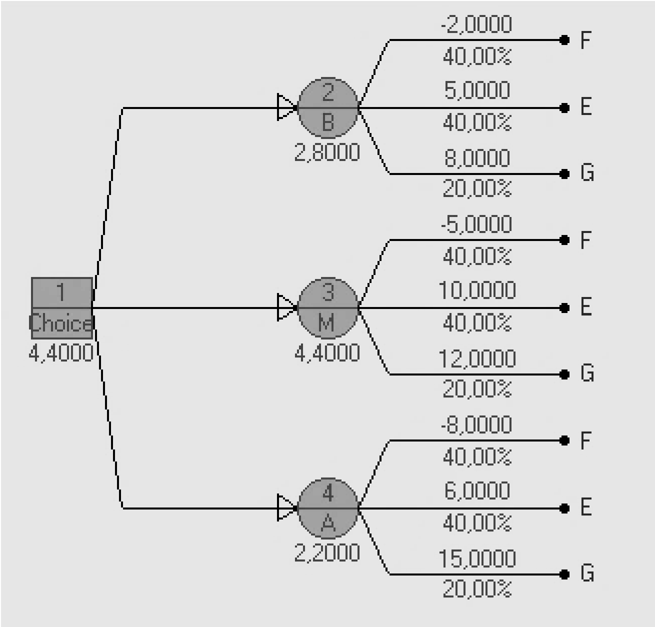


Decision \ State	F	E	G
Prior Probability	0.4	0.4	0.2
B	-2	5	8
M	-5	10	12
A	-8	6	15

Así obtendremos el conjunto de los resultados calculados mediante todos los métodos. De ellos, ahora nos interesa el valor esperado:

07-30-2002 Criterion	Best Decision	Decision Value	
Maximin	B	($2)	
Maximax	A	$15	
Hurwicz (p=0,5)	M	$ 3,50	
Minimax Regret	M	$3	
Expected Value	M	$ 4,40	
Equal Likelihood	M	$ 5,67	
Expected Regret	M	$ 1,80	
Expected Value	without any	Information =	$ 4,40
Expected Value	with Perfect	Information =	$ 6,20
Expected Value	of Perfect	Information =	$ 1,80

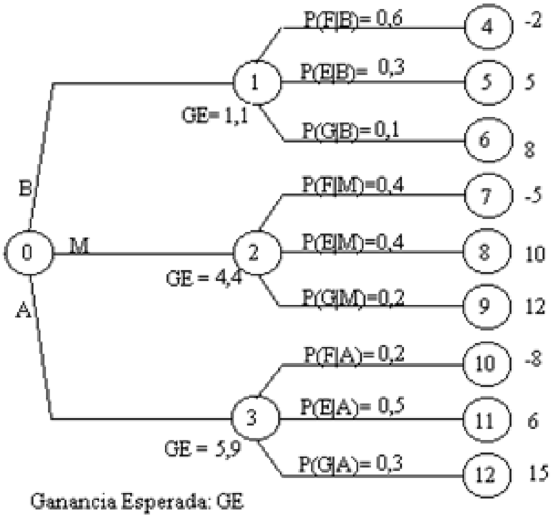
y el árbol de decisiones correspondiente:



Podemos analizar el mismo problema desde otro punto de vista: supongamos que, si se realiza una inversión alta, las probabilidades de éxito son mayores que si hiciéramos una baja inversión. Para este nuevo escenario rediseñamos la tabla inicial con probabilidades que relacionamos con el nivel de inversión:

	RESULTADOS		
DECISIONES↓	**FRACASO – F**	**ÉXITO – E**	**GRAN ÉXITO – G**
BAJA – B	0,6	0,3	0,1
MODERADA – M	0,4	0,4	0,2
ALTA – A	0,2	0,5	0,3

Ahora la ganancia esperada para el nodo 1 pasa a ser –2 x 0,6 + 5 x 0,3 + 8 x 0,1 = 1,1



En este caso vemos que la mejor inversión resulta ser la alta.

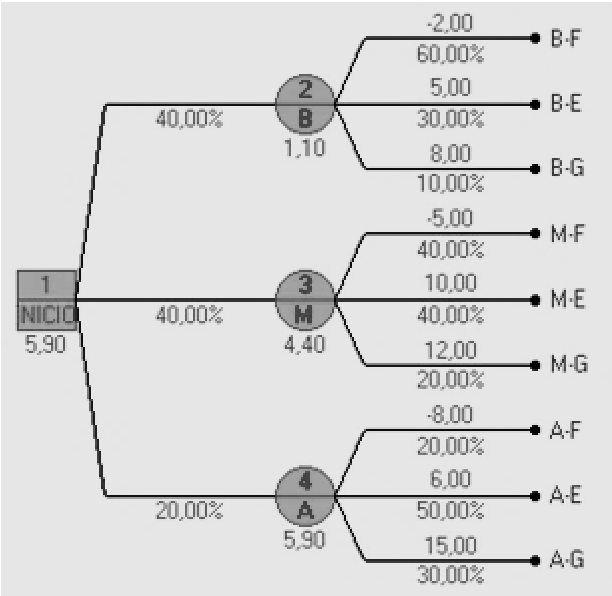
Resolución con WinQSB

Seleccionamos "*Análisis de árbol de decisiones*", anotamos que son 13 nodos y cargamos la planilla correspondiente al árbol:

Node/Event Number	Node Name or	Node Type (enter D or	Immediate Following	Node Payoff	Probability (if
1	INICIO	D	2,3,4		
2	B	C	5,6,7		.4
3	M	C	8,9,10		.4
4	A	C	11,12,13		.2
5	B-F			-2	0.6
6	B-E			5	.3
7	B-G			8	.1
8	M-F			-5	.4
9	M-E			10	.4
10	M-G			12	.2
11	A-F			-8	.2
12	A-E			6	.5
13	A-G			15	.3

Vemos que la columna *Tipo de Nodo* lleva una letra C si es opción (por Choice), D si es decisión o nada si es terminal. Luego encontramos una solución en tabla y otra gráfica. La tabla indica que la decisión es inversión alta (A):

07-31-2002	Node/Event	Type	Expected value	Decision
1	INICIO	Decision node	$ 5,90	A
2	B	Chance node	$ 1,10	
3	M	Chance node	$ 4,40	
4	A	Chance node	$ 5,90	
5	B-F	End node	($2)	
6	B-E	End node	$5	
7	B-G	End node	$8	
8	M-F	End node	($5)	
9	M-E	End node	$10	
10	M-G	End node	$12	
11	A-F	End node	($8)	
12	A-E	End node	$6	
13	A-G	End node	$15	
Overall	Expected	Value =	$ 5,90	



Árboles Multinivel

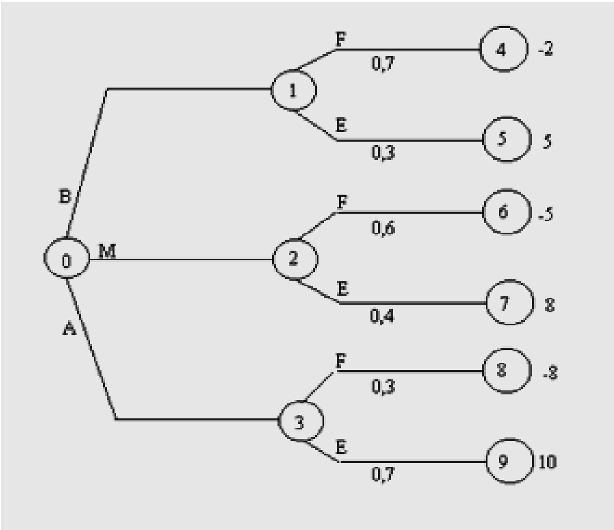
Llegados a este punto, estamos en condiciones de comenzar a trabajar en árboles multinivel, que permiten tomar decisiones en varios puntos del tiempo, de manera tal que la decisión que tomemos en un momento dado condicionará a las que debamos tomar en momentos posteriores.

Vamos a modificar y simplificar el problema ejemplo, suponiendo que solo pueden existir dos resultados: Fracaso (F) o éxito (E), con las siguientes estimaciones de ganancias (tabla superior) y probabilidades condicionadas para cada resultado (inferior):

	Ganancias de los Resultados	
	Fracaso – F	**Éxito – E**
Baja – B	–2	5
Moderada – M	–5	8
Alta – A	–5	10

	Probabilidades de los Resultados	
	Fracaso – F	**Éxito – E**
Baja – B	0,7	0,3
Moderada – M	0,6	0,4
Alta – A	0,3	0,7

De esta manera, el árbol de decisiones correspondiente será:



Supongamos que luego de lanzar el producto esperamos 8 semanas para tomar una segunda decisión sobre el resto de la inversión que se destinará a publicidad para el resto del año.

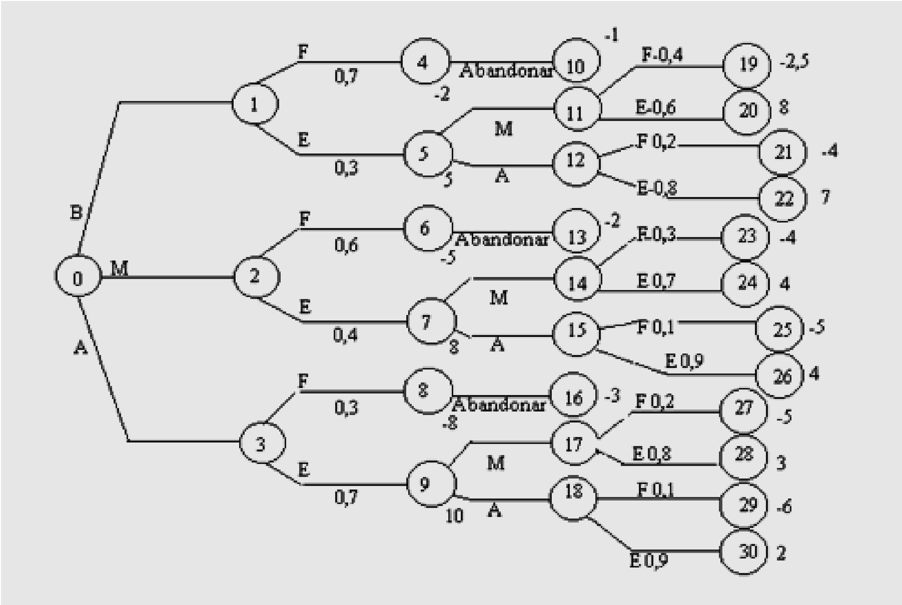
Esta segunda decisión dependerá de cuál fue la primera y de qué resultado se obtuvo al cabo de las ocho semanas, por ejemplo, si la primera decisión fue hacer una inversión alta, las alternativas para la segunda decisión serán:

Primera decisión		Segunda Decisión
Decisión Tomada	**Resultado**	**Alternativas**
A A	F E	Abandonar Seguir con inversión en publicidad Moderada M o Seguir con inversión Alta A

Completamos esta tabla agregándole todas las alternativas. Así obtendremos:

Primera Decisión		Segunda Decisión			
Decisión	**Resultado**	**Decisión**	**Resultado**	**Probabilidad**	**Ganancia**
Baja	**Fracaso**	Abandonar	–	–	1
	Éxito	Seguir con M	**Fracaso**	0,4	–2,5
			Éxito	0,6	8
		Seguir con A	**Fracaso**	0,2	–4
			Éxito	0,8	7
Moderada	**Fracaso**	Abandonar	–	–	–2
	Éxito	Seguir con M	**Fracaso**	0,3	–4
			Éxito	0,7	4
		Seguir con A	**Fracaso**	0,1	–5
			Éxito	0,9	4
Alta	**Fracaso**	Abandonar	–	–	–3
	Éxito	Seguir con M	**Fracaso**	0,2	–5
			Éxito	0,8	3
		Seguir con A	**Fracaso**	0,1	–6
			Éxito	0,9	2

Con ella podemos construir el árbol de decisiones:



En cada nodo calculamos la *ganancia óptima esperada de ahí en adelante*. Por ejemplo, el nodo 11, que es un nodo conectado con los nodos terminales del árbol, que son los nodos 12, 14, 15 17 y 18 tendrá una ganancia de cero, y la ganancia esperada será:

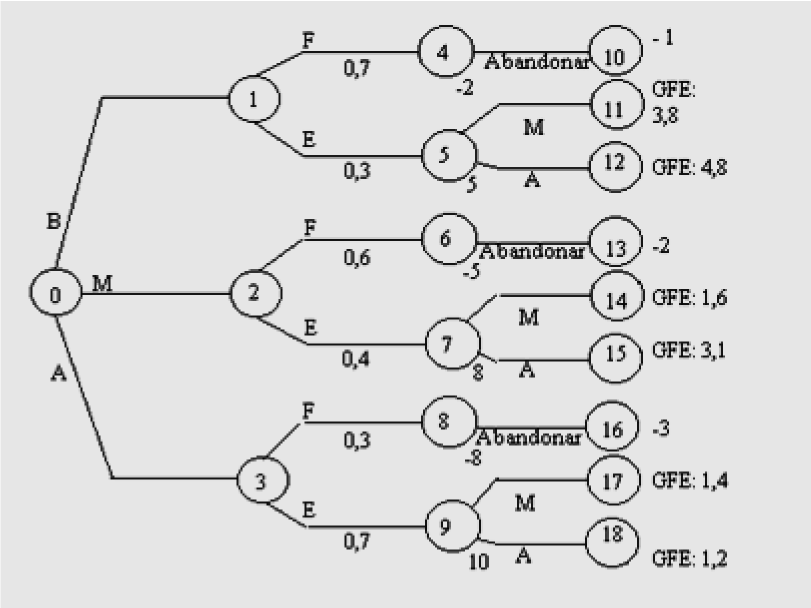
Ganancia total esperada en el nodo 11	**=**	**Ganancia en el nodo 11**	**+**	**Ganancia futura en el nodo 11**	**=**

Ganancia total esperada en el nodo 11	**=**	**0**	**+**	**Probabilidad del arco 11 – 19**	**x**	**Ganancia en el nodo 19**	**+**	**Probabilidad del arco 11 – 20**	**x**	**Ganancia en el nodo 20**

= 0 + 0,4 x –2,5 + 0,6 x 8 = 3,8

Este valor puede incluirse en el árbol y calcularse en forma similar para cada uno de los demás nodos.

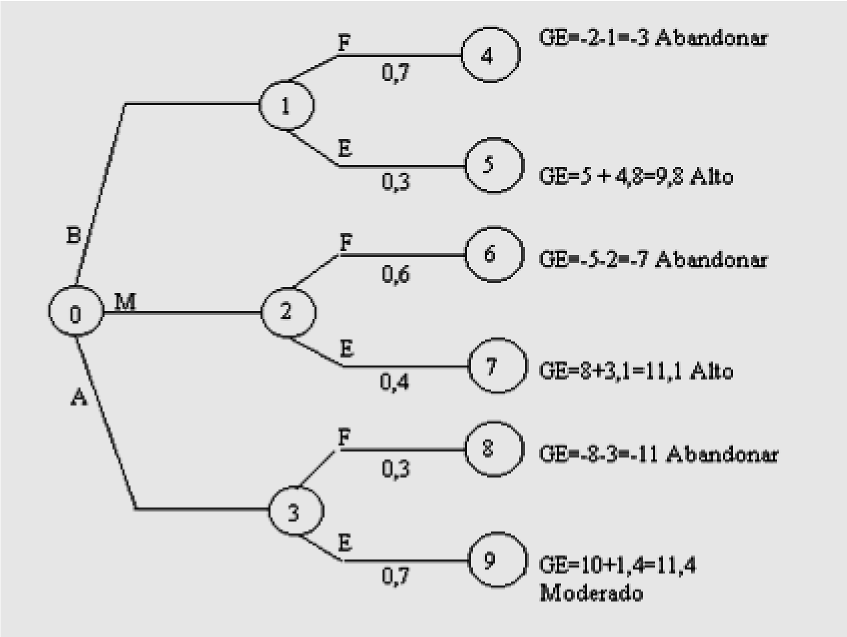
El árbol, en esta etapa, representa las GANANCIAS FUTURAS ESPERADAS (GFE)



Procediendo hacia atrás en el tiempo, en este punto necesitamos calcular las ganancias totales esperadas en los nodos 4 a 9, utilizando las ganancias de los nodos 10 a 18. Por ejemplo, el nodo 5, que es un punto de decisión de segundo nivel, representa una inversión baja con un resultado exitoso.

En ese punto podremos realizar cualquiera de las siguientes acciones: Invertir en publicidad moderadamente, con una ganancia esperada de 3,8 o invertir en un nivel alto, con una ganancia esperada de 4,8 (nodos 11 y 12, respectivamente) Se debería elegir el mejor resultado esperado, 4,8, el cual sumado a la ganancia propia del nodo, 5, arroja un total esperado de 9,8.

Analizamos el resto de los nodos de la misma manera y obtendremos el árbol que sigue:



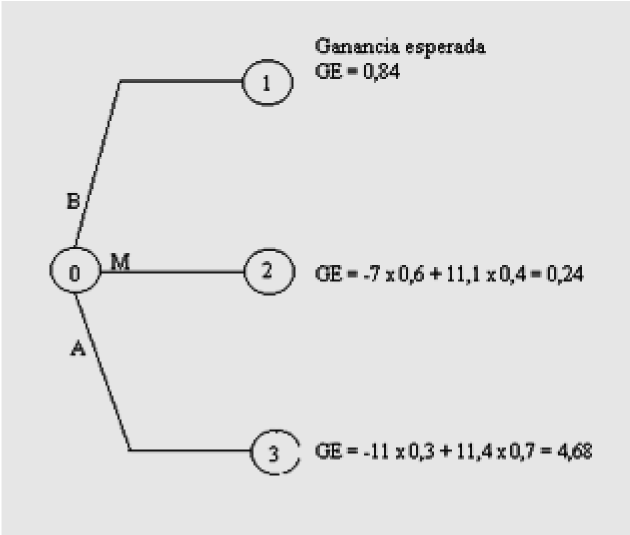
Seguimos retrocediendo en el tiempo, analizando ahora los nodos 1 a 3. Por ejemplo, para el nodo 1, la ganancia futura esperada será:

Ganancia total esperada en el nodo 1	**=**	**Ganancia en el nodo 1**	**+**	**Ganancia futura en el nodo 1**	**=**

Ganancia total esperada en el nodo 1	**=**	**0**	**+**	**Probabilidad del arco 1 – 4**	**x**	**Ganancia en el nodo 4**	**+**	**Probabilidad del arco 1 – 5**	**x**	**Ganancia en el nodo 5**

GE N1 = 0 + 0,7 x (–3) + 0,3 x 9,8 = 0,84

Con lo cual el árbol queda:



Por último, calcularemos el valor del nodo cero, que significa que debemos evaluar los nodos 1, 2 y 3:

a) Inversión Baja, B, con una ganancia esperada de 0,84 → Nodo 1
b) Inversión moderada, M, con una ganancia esperada de 0,24 → Nodo 2
c) Inversión alta, A, con una ganancia esperada de 4,68 → Nodo 3

Significa que la primera decisión, el primer nivel de decisiones, será la inversión alta, y conduce al nodo 3. En ese momento la nueva decisión se tomará en función de los resultados obtenidos, que conduce a los nodos 8 o 9: si fue un fracaso, ir al nodo 8, abandonar, con una ganancia de –11 (pérdida de 11). Si fue éxito, ir al nodo 9, inversión publicitaria moderada, con una ganancia de 11,4.

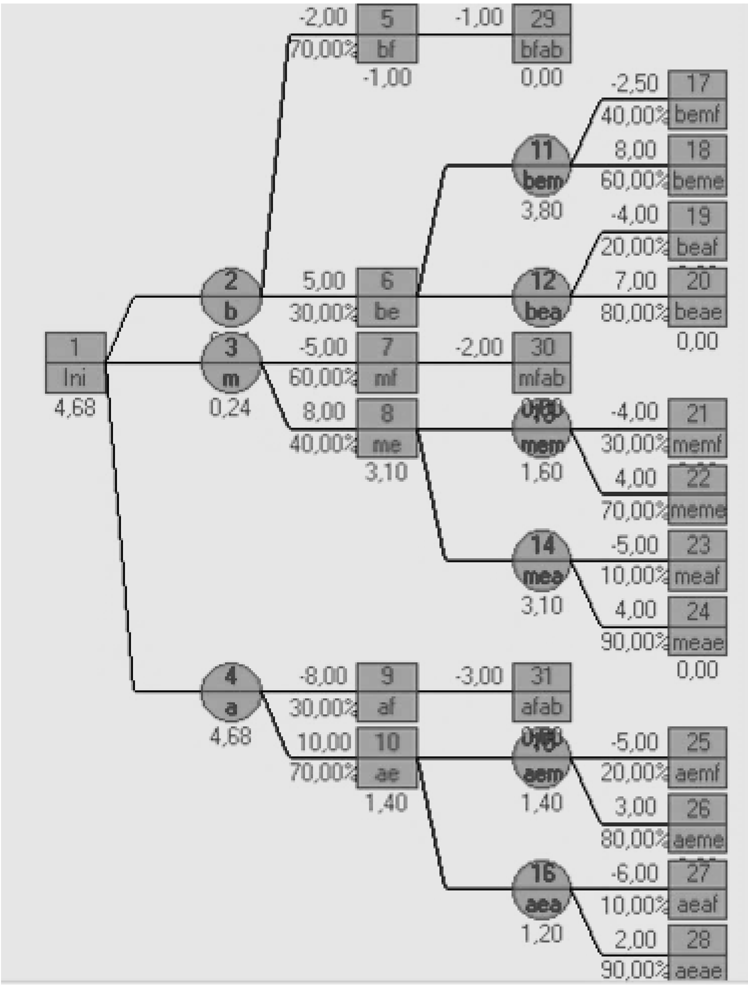
Resolución con WinQSB:

Para resolver este caso en WinQSB, ingresamos en ***análisis de árbol de decisiones*** con 31 nodos:

Node/Event	Node Name	Node Type	Immediate	Node	Probability
1	Ini	d	2,3,4		
2	b	c	5,6		
3	m	c	7,8		
4	a	c	9,10		
5	bf	d	29	-2	.7
6	be	d	11,12	5	.3
7	mf	d	30	-5	.6
8	me	d	13,14	8	.4
9	af	d	31	-8	.3
10	ae	d	15,16	10	.7
11	bem	c	17,18		
12	bea	c	19,20		
13	mem	c	21,22		
14	mea	c	23,24		
15	aem	c	25,26		
16	aea	c	27,28		
17	bemf	d		-2.5	.4
18	beme	d		8	.6
19	beaf	d		-4	.2
20	beae	d		7	.8
21	memf	d		-4	.3
22	meme	d		4	.7
23	meaf	d		-5	.1
24	meae	d		4	.9
25	aemf	d		-5	.2
26	aeme	d		3	.8
27	aeaf	d		-6	.1
28	aeae	d		2	.9
29	bfab	d		-1	
30	mfab	d		-2	
31	afab	d		-3	

debemos ver con cuidado el tipo de cada nodo: si a partir de él salen flechas para cada decisión se debe marcar con D, si es un estado de la naturaleza, con C. Deberíamos obtener lo siguiente:

07-30-2002	Node/Event	Type	Expected value	Decision
1	Ini	Decision node	$ 4,68	a
2	b	Chance node	$ 0,84	
3	m	Chance node	$ 0,24	
4	a	Chance node	$ 4,68	
5	bf	Decision node	($1)	bfab
6	be	Decision node	$ 4,80	bea
7	mf	Decision node	($2)	mfab
8	me	Decision node	$ 3,10	mea
9	af	Decision node	($3)	afab
10	ae	Decision node	$ 1,40	aem
11	bem	Chance node	$ 3,80	
12	bea	Chance node	$ 4,80	
13	mem	Chance node	$ 1,60	
14	mea	Chance node	$ 3,10	
15	aem	Chance node	$ 1,40	
16	aea	Chance node	$ 1,20	
17	bemf	Decision node	0	
18	beme	Decision node	0	
19	beaf	Decision node	0	
20	beae	Decision node	0	
21	memf	Decision node	0	
22	meme	Decision node	0	
23	meaf	Decision node	0	
24	meae	Decision node	0	
25	aemf	Decision node	0	
26	aeme	Decision node	0	
27	aeaf	Decision node	0	
28	aeae	Decision node	0	
29	bfab	Decision node	0	
30	mfab	Decision node	0	
31	afab	Decision node	0	



Teoría de utilidades

Hasta acá, el criterio de decisión fue maximizar las ganancias, y particularmente, en los casos recién vistos, las ganancias esperadas. Sin embargo, pueden existir casos en que ese no sea el criterio más apropiado: por ejemplo, una persona que quiere tomar la decisión de jugar a la lotería, sabe que la ganancia esperada es un valor negativo (si no fuera así la empresa que organiza la Lotería no tendría ganancias), por lo tanto, si la decisión se tomara con el criterio de ganancia esperada esa persona no jugaría. Pero al tomar la decisión de jugar lo hace aceptando la muy alta probabilidad de perder poco dinero frente a la muy pequeña probabilidad de ganar mucho dinero.

Otro caso es la decisión de adquirir un contrato de seguro de incendios. El resultado esperado es negativo (las compañías aseguradoras ganan dinero), pero el asegurado gasta dinero por la pequeña probabilidad de tener que gastar mucho dinero en reparaciones grandes.

Las diferencias que existen entre los que juegan y los que no o entre los que aseguran y los que no, radica en un criterio distinto al de la ganancia y que se puede expresar como el valor que le dan al dinero: para algunos el valor de perder unos pocos pesos en la lotería en muy pequeño comparado con el valor de la posible ganancia de varios millones, mientras que otros consideran que no vale la pena perder ese dinero porque lo valoriza más que la remota posibilidad de ganar. Obviamente esto es un criterio subjetivo, que, sin embargo, puede ser cuantificado utilizando lo que llamaremos *utilidad*.

Una empresa fabrica grandes muebles de oficina desde hace muchos años y decide ampliar su oferta incorporando por cinco años la representación de una marca de computadoras. Las alternativas que se le presentan son:

1. ***Adquirir la representación de una empresa con productos bien conocidos. Ofrece alta probabilidad de ganar mercado, pero los costos son altos. ALTERNATIVA B.***
2. ***Adquirir la representación de una empresa sin renombre. La probabilidad de ganar el mercado es menor pero los costos son más bajos. ALTERNATIVA N.***
3. ***Adquirir la representación de una empresa nueva que tiene un desarrollo innovador y cuya política es avanzar en sistemas que otras empresas no poseen. La alternativa es riesgosa, pero si el producto es aceptado en el mercado, las ganancias serán altas. ALTERNATIVA I***

Codificamos la participación en el mercado de la siguiente manera:

a) Baja, L
b) Promedio, M
c) Alta, H

Estas probabilidades están condicionadas por la decisión primaria: qué tipo de representación fue elegida. Con estos datos se obtienen tablas de ganancias expresadas en unidades arbitrarias:

	Ganancias en función de Resultados en la participación del mercado		
Decisiones	**Baja (L)**	**Promedio (M)**	**Alta (H)**
B –	–5	4	7
N –	–1	2	5
I –	–1	3	15

	Probabilidades condicionales de los Resultados dada una decisión		
Decisiones	**Baja (L)**	**Promedio (M)**	**Alta (H)**
B –	0,3	0,5	0,2
N –	0,4	0,4	0,2
I –	0,6	0,3	0,1

Para determinar la mejor alternativa primero se debe elegir un criterio de decisión. Supóngase que se decide el criterio de maximizar la ganancia esperada, cuyos resultados serán:

DECISIÓN	GANANCIA ESPERADA
B	–5 x 0,3 + 4 x 0,5 + 7 x 0,2 = 1,9
N	–1 x 0,4 + 2 x 0,4 + 5 x 0,2 = 1,4
I	–1 x 0,6 + 3 x 0,3 + 15 x 0,1 = 1,8

Con estos resultados sería la decisión B la recomendable. La cuestión que nos planteamos es: ¿Se pueden correr riesgos y optar por otras alternativas?

Para poder valorizar numéricamente las ganancias esperadas como utilidades seguiremos el siguiente método:

1. Orden de ganancias

Clasificamos las ganancias en orden descendente: 15, 7, 5, 4, 3, 2, –1, –1, –5. Se puede asignar un valor relativo cualquiera, por ejemplo 100 a la mayor ganancia (15 en este caso) y cero a la menor (–5)

2. Conversión de las ganancias en utilidades

Si queremos estimar cuánto representa, por ejemplo, la ganancia de 7 respecto a los extremos, sería buena idea comenzar con una encuesta entre los que toman decisiones.

Esa encuesta puede diseñarse, por ejemplo, solicitando se considere un juego de lotería que ofrece la ganancia potencial de 15 con una probabilidad de 0,05 y la ganancia potencial de –5 con una probabilidad de 1 – 0,05 = 0,95 y efectuando la pregunta: ¿preferiría jugar a la lotería o aceptar dar garantías por una ganancia de 7? Es casi seguro que los encuestados contestarían a favor de los 7, y que se volcarían a favor de la lotería si las probabilidades fueran las inversas a las planteadas.

Por tanto, el objetivo es determinar la probabilidad ***P*** de ganar los 15 y la probabilidad 1 – ***P*** de ganar –5 de manera tal que a los encuestados le sea indiferente optar por la lotería o por los 7 de ganancia, presentando diferentes valores de probabilidad cada vez que se hace la pregunta.

Como ejemplo, supóngase que el resultado de las entrevistas arroja un valor de ***P*** = 0,40. A los que toman la decisión les resulta indiferente obtener una ganancia de 7 o participar de un juego donde hay una probabilidad de 0,4 para obtener 15 de premio y una probabilidad de 0,6 para obtener –5.

En ese ejemplo, la utilidad de los 7 es

$$100\,P = 100 \times 0{,}4 = 40.$$

La ganancia esperada en la lotería será

$$15\,P + (-5)(1 - P) = 15 \times 0{,}4 - 5 \times 0{,}6 = 3$$

Esto indica que el encuestado estaría dispuesto a pagar 7 para jugar una lotería cuya ganancia esperada es solo de 3, ¿por qué? Porque le dan un valor mayor a la oportunidad de ganar 15.

Con este método se puede hallar un valor de utilidad a cada una de las ganancias. En la tabla siguiente vemos un ejemplo:

Ganancia	***P***	**Utilidad (100*P*)**
15	–	100
7	0,40	40
5	0,30	30
4	0,25	25
3	0,20	20
2	0,16	16
–1	0,10	10
–1	0,10	10
–5	–	0

Ahora podemos reemplazar la tabla de ganancias por una tabla de utilidades, reemplazando la ganancia por la utilidad asociada:

	Ganancias en función de Resultados en la participación del mercado		
Decisiones	**Baja (L)**	**Promedio (M)**	**Alta (H)**
B –	0	25	40
N –	10	16	30
I –	10	20	100

Toma de decisión usando la tabla de utilidades

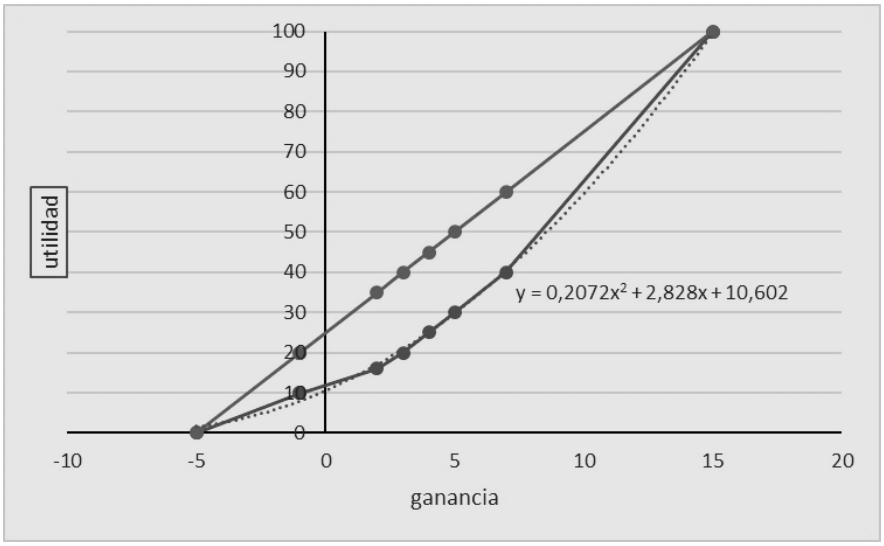
Usando la tabla de probabilidades y la utilidad en lugar de la ganancia, buscamos la decisión que maximice las utilidades:

Decisión	Utilidad esperada
B –	0x0,3 + 25x0,5 + 40x0,2 = 20,5
N –	10x0,4 + 16x0,4 + 30x0,2 = 16,4
I –	10x0,6 + 20x0,3 + 100x0,1= 22,0

Lo que resulta el elegir la alternativa innovadora, diferente a la encontrada con el criterio conservador anterior.

Funciones de utilidad

Si graficamos las utilidades versus las ganancias, como en la figura siguiente, observaremos que la función de utilidad obtenida está por debajo de la línea recta que une los puntos extremos de las ganancias: una función de este tipo indica tomas de decisiones agresivas y con riesgos. Si la curva estuviera por encima, sería indicativa de decisiones conservadoras.

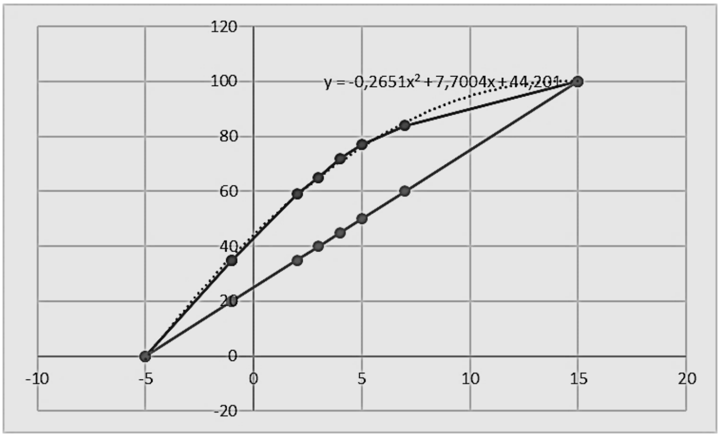


Esta función fue obtenida graficando los valores de utilidad de la tabla y calculando la tendencia polinomial de segundo grado para este ejemplo. Con la función que aparece en el gráfico es posible calcular la utilidad asociada a cualquier valor de ganancia.

Cuando las funciones de utilidad halladas son del tipo de las del ejemplo, que trazan por debajo de la línea recta que une los valores extremos se trata de decisiones buscadoras de riesgo, o tomadores de decisión que prefieren alternativas de inversión relativamente agresivas. Por contrario, si la función de utilidad fuera la del gráfico siguiente, se tendría una función conservadora o contraria al riesgo, en el sentido que se les da mayor utilidad a las ganancias más bajas y, consecuentemente, más seguras:

GANANCIAS	UTILIDADES
-5	0
-1	35
-1	35
2	59
3	65
4	72
5	77
7	84
15	100

Una tercera alternativa es la neutralidad, cuya función de utilidad es la línea recta que une los extremos, en ese caso la función de utilidad es lineal.



Sensibilidad

Las probabilidades disponibles en la toma de decisiones son simplemente estimaciones, por eso puede ser necesario poseer información adicional sobre la validez de las soluciones halladas cuando cambian las probabilidades utilizadas para llegar a ellas. Si la decisión óptima hallada es muy sensible a un cambio de probabilidad puede justificar una mayor inversión en encontrar las probabilidades adecuadas.

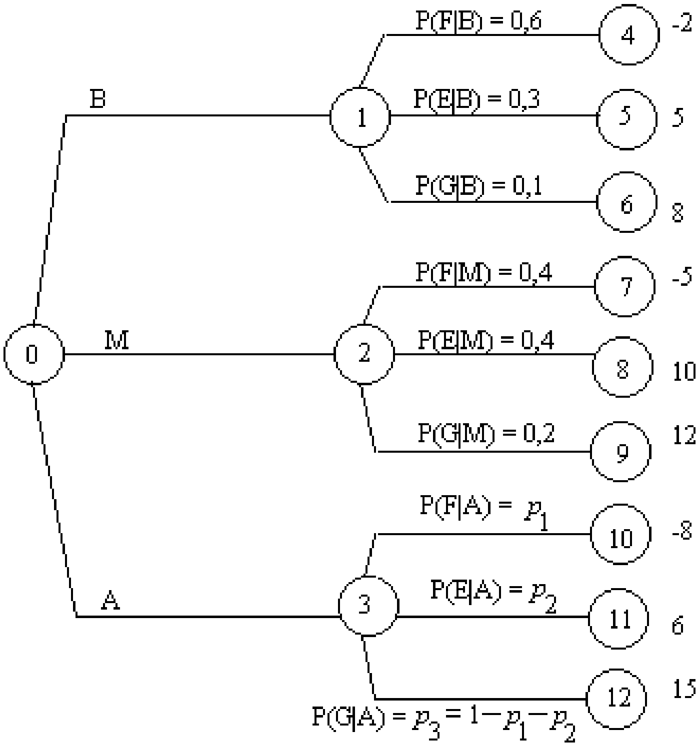
Volviendo al caso que seguimos como ejemplo y recordando la tabla original de probabilidades:

	RESULTADOS		
DECISIONES	**FRACASO – F**	**ÉXITO – E**	**GRAN ÉXITO – G**
BAJA – B	0,6	0,3	0,1
MODERADA – M	0,4	0,4	0,2
ALTA – A	0,2	0,5	0,3

Trataremos de averiguar cuanto puede cambiar la probabilidad de los tres resultados posibles obtenidos por haber decidido hacer una inversión alta sin que se altere el resultado que llevó a tomar esa decisión.

Para ello reemplazaremos la fila de probabilidades asociadas con la **inversión alta** por variables, digamos p_1, p_2 y p_3. Transformamos las probabilidades en variables de esta manera:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$p_3 = 1 - p_1 + p_2$$



Las ganancias esperadas son:
EN EL NODO 1:

GE(1) = 0,6 x GE (4) + 0,3 x GE(5) + 0,1 x GE(6) = 0,6 x (-2) + 0,3 x 5 + 0,1 x 8 = 1,1

EN EL NODO 2:

GE(2) = 0,4 x (-5) + 0,4 x 10 + 0,2 x 12 = 4,4

EN EL NODO 3:

GE(3) = p_1 x (-8) + p_2 x 6 + (1 – p_1 – p_2) x 15 = 15 – 23 p_1 – 9 p_2

Para que la inversión alta siga siendo la decisión óptima la ganancia asociada debería ser de al menos el mismo valor que el de una inversión baja de 1,1 o moderada de 4,4. Ambas condiciones son restricciones que se aseguran satisfaciendo las expresiones:

$$15 - 23\ p_1 - 9\ p_2 \geq 4{,}4$$

o sea

$$-\ 23\ p_1 - 9\ p_2 \geq 10{,}6$$

además

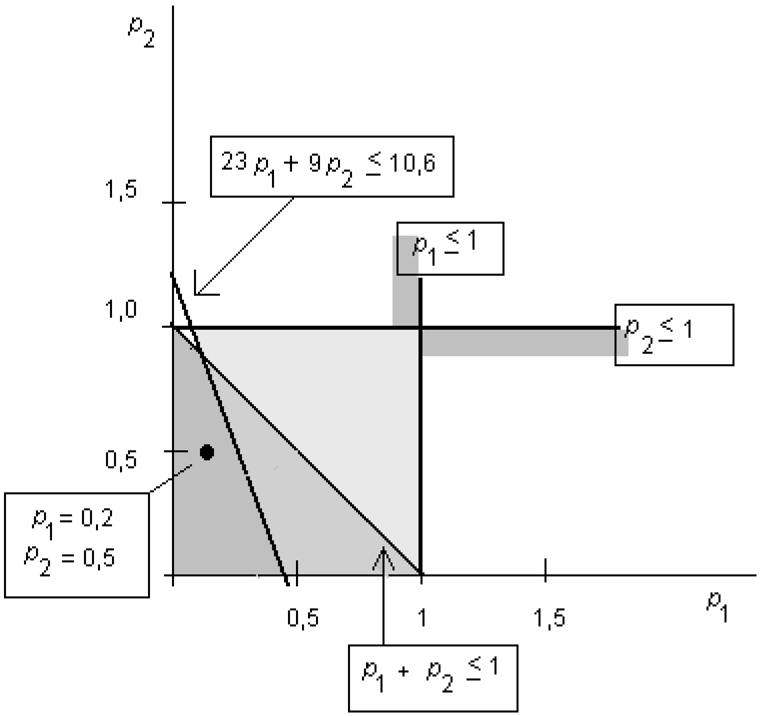
$$0 \leq p_1 \leq 1 \text{ y } 0 \leq p_2 \leq 1$$

y

$$p_3 = 1 - p_1 - p_3 \geq 0 \text{ que resulta } p_1 + p_2 \leq 1$$

En síntesis, podemos suponer que disponemos de un conjunto de restricciones como el siguiente:

1) $23\ p_1 + 9\ p_2 \leq 10{,}6$
2) $p_1 \leq 1$
3) $p_2 \leq 1$
4) $0 \leq p_1$ y $0 \leq p_2$



Como vemos en la figura, las probabilidades dadas caen dentro del área de soluciones factibles. Cualquier cambio en esas probabilidades debería encontrarse en esa misma área para que la solución óptima hallada sea la misma. Por ejemplo, si ambas probabilidades aumentaran a 0,25 y 0,55, la decisión óptima ya no sería inversión alta, sino que sería inversión moderada.

$$23p_1 + 9p_2 \le 10{,}6$$
$$23 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}5 = 9{,}1 \le 10{,}6$$
$$23 \times 0{,}25 + 9 \times 0{,}55 = 10{,}7 \ge 10{,}6$$

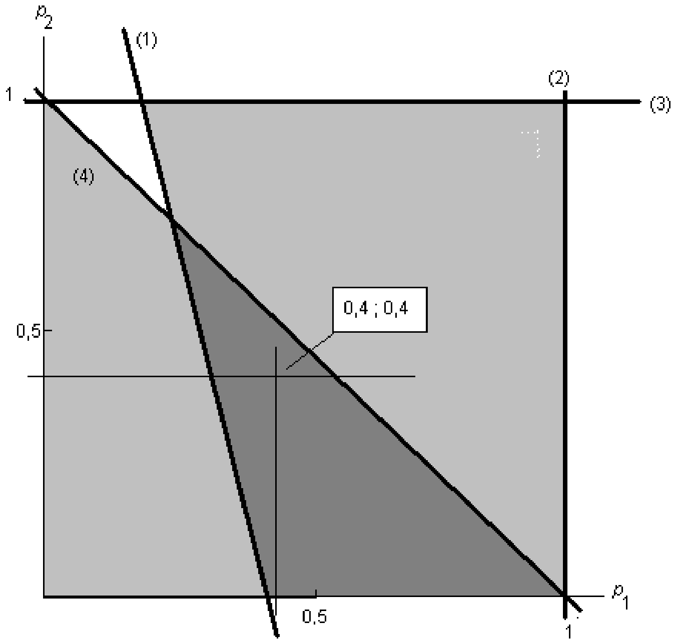
con la probabilidad original se satisface la inecuación, lo que no ocurre con un desvío de 0,05.

Análisis de sensibilidad para las probabilidades condicionales

Con un procedimiento similar podremos determinar la sensibilidad de la decisión tomada, (inversión alta en este ejemplo) frente a los cambios en las probabilidades condicionales asociadas con una de las otras inversiones y suponiendo que las de las demás permanecen sin variaciones.

Para ello, convertimos en variables las probabilidades de la segunda fila de la tabla: p_1, p_2 y p_3, determinando los valores de p_1 y de p_2 de manera tal que la decisión siga siendo inversión alta. Esto ocurre cuando la ganancia esperada para la inversión alta excede a la de las inversiones baja y moderada, cosa que ocurre cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $17p_1 + 2p_2 \ge 6{,}1$
2) $p_1 \le 1$
3) $p_2 \le 1$
4) $p_1 + p_2 \le 1$



Siempre que los pares de probabilidad p_1 y p_2 caigan dentro de la región sombreada se obtendrá que la decisión óptima sigue siendo la inversión alta.

Este mismo proceso se puede realizar para la inversión baja, sustituyendo sus valores de probabilidad por variables (1er. Renglón de la tabla) y graficando.

Capítulo 11. Teoría de juegos

> Muchos pensadores trataron, a lo largo de los años, de modelizar la estructura de los juegos comúnmente llamados de azar, tanto con la finalidad de lograr ser ellos mismos jugadores exitosos, como para entender la metodología y procesos mentales que emplean aquellos que toman las decisiones en el medio de la competencia. Particularmente al detectar que, en esas lides, siempre existían personas con más tendencia al éxito que la que podría proporcionar solamente el azar

Llamamos "juegos" a la creación de escenarios que exponen determinadas situaciones problemáticas donde hay posibles conflictos o competencia antagónica directa entre partes o participantes interesados. Esos participantes son llamados "jugadores". En esas situaciones intervienen el azar y factores humanos.

Uno de los que tenía inquietudes respecto a entender los procesos mentales de los jugadores exitosos fue Blas Pascal[3], quien desarrolló algunas teorías. En 1928 Von

---

[3] Nacido el 19 de junio en Clermont (ahora Clermont-Ferrand), Auvernia, Francia y fallecido el 19 de agosto de 1662 en París, Francia, a la edad de 39 años. **Blaise Pascal** fue un matemático y filósofo francés muy influyente que contribuyó a muchas de las áreas de las matemáticas. Trabajó en las secciones cónicas, en geometría proyectiva y, carteándose con Fermat, sentó los cimientos de la teoría de la probabilidad. También desarrolló trabajos en física, sobre presión atmosférica y probó que existe el vacío. Escribió tratados religiosos (Provinciales) y vivió períodos alejado de las ciencias y dedicados a analizar la relación de los seres humanos con Dios. >>(Sigue…)

Neumann[4] enuncia el teorema *Minimax,* que constituye el primer modelo que desarrolló la teoría de juegos, profundizándose posteriormente, al presentar en 1944 junto a Oskar Morgenstern[5] el trabajo *Teoría de Juegos y el Comportamiento Económico.* Posteriormente, en 1994, John Nash[6] obtuvo un premio Nobel al realizar modelos de juego con equilibrios inestables. Otro premio Nobel relacionado con la teoría de juegos ya mencionado en capítulos anteriores, fue Leonid Hurwicz, que lo obtuvo en 2007.

El modelo de von Neumann[7] intenta abordar el conflicto de dos o más partes enfrentadas (beligerantes, en el campo militar, competidoras en el campo económico),

---

Pascal inventó la primera calculadora digital para ayudar a su padre en la tarea de la recaudación de impuestos. Trabajó en ella durante tres años desde 1642. El aparato, llamado *Pascalina*, se parecía a una calculadora mecánica de los años 1940. La primera calculadora mecánica fue inventada por Schickard en 1624.

Publicó un desafío, ofreciendo dos premios por la solución de problemas matemáticos a Wren, Laloubère, Leibniz, Huygens, Wallis, Fermat y otros matemáticos. Wallis y Laloubère entraron en la competencia, pero las soluciones fueron erróneas. Sluze, Ricci, Huygens, Wren y Fermat comunicaron sus descubrimientos a Pascal sin competir. Wren había estado trabajando en el reto de Pascal y este retó a su vez a Pascal, Fermat y Roberval a descubrir la longitud del arco y la longitud de la bóveda de la cicloide. Pascal publicó sus propias soluciones a sus retos en Cartas a Carcavi. Después de esa época perdió el interés por la ciencia y empleó sus últimos años en atender a los pobres y en ir de iglesia en iglesia en París.

[4] **John von Neumann zu Margitta**, nació el 28 de diciembre de 1903 y falleció el 8 de febrero de 1957. Fue un matemático húngaro-estadounidense, que realizó contribuciones importantes en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, informática, economía, análisis numérico, fluidodinámica de explosiones, estadística y muchos otros campos de la matemática. Recibió su doctorado en matemáticas de la Universidad de Budapest a los 23 años. Fue una de las cuatro personas seleccionadas para la primera facultad del Institute for Advanced Study. Trabajó en el Proyecto Manhattan (desarrollo y detonación de las primeras bombas atómicas). Junto con Edward Teller y Stanislaw Ulam, resolvió pasos fundamentales de la física de reacciones termonucleares y la bomba de hidrógeno. Es considerado el padre de la teoría de juegos y publicó el clásico libro *Theory of games and economic behavior*, junto a Morgenstern, en 1944. También desarrolló el concepto de "MAD" (Mutually Assured Destruction o destrucción mutua asegurada), que dominó la estrategia nuclear estadounidense durante los tiempos de la guerra fría.

[5] Nacido en Austria en 1902, estudió en Viena, Harvard y Nueva York, fallecido en Nueva Jersey en 1977

[6] Ver desarrollo en el Capítulo 12 (de este Libro 2)

[7] Hasta la década de 1930, el campo de la economía parecía involucrar el uso de una gran cantidad de matemáticas, pero mayoritariamente era superficial o irrelevante. La economía pretendía el objetivo de proveer formulaciones precisas y soluciones a problemas que eran, por su misma naturaleza *imprecisos e indeterminados*. La economía se encontraba en un estado similar al de la

en donde intervienen aspectos emotivos, psicológicos, o de coyuntura, los cuales son acotados para formalizar un modelo matemático.

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía, la teoría de juegos se usa actualmente en muchos campos, desde la biología a la filosofía. Experimentó un crecimiento sustancial antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar, en particular a causa del concepto de *destrucción mutua garantizada*. Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural. A raíz de juegos como el dilema del prisionero[4], en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en ciencia política, ética y filosofía. Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética.

Aunque tiene algunos puntos en común con la teoría de la decisión, la teoría de juegos estudia decisiones realizadas en entornos con interacciones. En otras palabras, estudia la elección de la conducta óptima cuando los costos y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros individuos.

No debe confundirse esta teoría con la del mismo nombre que, en el campo de la psicología, se incluye en el análisis transaccional propuesto por el psiquiatra Eric Berne.

Historia de la Teoría de Juegos

La primera discusión conocida sobre la teoría de juegos aparece en una carta de James Waldegrave en 1713, en la cual propone una solución minimax de estrategia mixta a una versión de un juego de cartas para dos personas. No se publicó un análisis teórico de teoría de juegos en general hasta un trabajo de Cournot en 1838.

La teoría de juegos no existió como campo singular de estudio hasta que John von Neumann publicó una serie de artículos en 1928. Estos resultados fueron ampliados más tarde en su libro de 1944, escrito con Oskar Morgenstern. En ese trabajo se presenta un método para encontrar soluciones óptimas para juegos de suma cero de dos personas. Durante ese período, el foco de atención fueron los juegos cooperativos. Esta formulación de la teoría de juegos analiza las estrategias óptimas para grupos de individuos, asumiendo que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas.

física del siglo XVII: esperando por el desarrollo de un lenguaje apropiado a través del cual expresarse y resolver sus problemas. Así como la física encontró su lenguaje en el cálculo infinitesimal, von Neumann propuso las teorías de juegos y del equilibrio general para la economía.

En 1950, aparecieron las primeras discusiones y se publicó el dilema del prisionero acerca del cual se desarrolló un experimento en la corporación RAND. Alrededor de esta misma época, John Nash desarrolló una definición de una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores donde el óptimo no se había definido previamente, conocido como equilibrio de Nash, que es lo suficientemente general como para permitir el análisis de juegos no cooperativos y cooperativos.

La teoría de juegos experimentó una notable actividad en la década de 1950, al desarrollarse los conceptos básicos y aparecer las primeras aplicaciones en la filosofía y las ciencias políticas.

En 1965, Reinhard Selten introdujo su concepto de solución de los equilibrios perfectos, que más adelante concretó Nash. En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos. Él, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganaron el Premio Nobel de Economía en 1994.

En la década de 1970 la teoría de juegos se aplicó extensamente a la biología, en el su concepto de estrategia estable evolutiva. En 2005, los teóricos de juegos Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el premio Nobel de Economía. Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la teoría de juegos evolutiva. Por su parte, Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio.

Definiciones

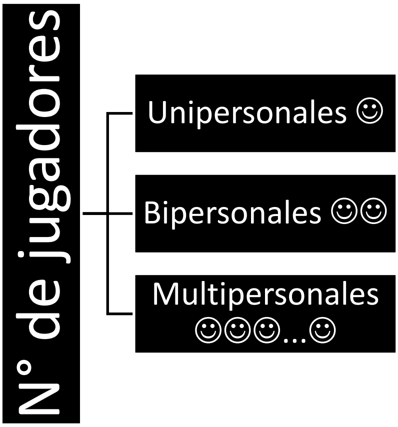
Cada juego, y los juegos en general, quedan definidos por un conjunto de reglas, denominadas “modelo del juego”, que establecen:

- número de jugadores
- información que cada jugador posee acerca del juego y de los demás jugadores
- cómo se establecen sus relaciones
- cuál es el resultado del juego

El juego se desarrolla a través de ***movimientos***: cada jugador realiza, por turno, una selección. El conjunto completo de movimientos se denomina ***partida***, mientras que definimos como ***estrategia*** al modo de acción por el cual cada jugador efectúa sus selecciones a lo largo de una partida.

Clasificación de los juegos:

- Desde el punto de vista de la ***cantidad de jugadores***:



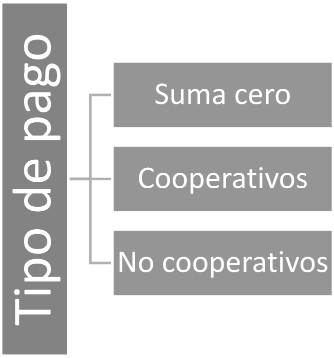
En los unipersonales. no se puede diferenciar un adversario concreto: la naturaleza, el medio ambiente, etc. Constituye un capítulo en la teoría de toma de decisiones.

En los otros, hay oponentes (2 o más), enfrentados, los cuales toman sus decisiones individualmente.

- Desde el punto de vista de la ***cantidad de estrategias posibles***:

Finitos cuando se disponen de un conjunto numerable de estrategias y ***diferenciales*** cuando la cantidad de estrategias está en el conjunto de los números reales.

- Desde el punto de vista de los pagos:



Serán de suma cero aquellos en los oponentes están enfrentados por un objetivo excluyente: ganar. Todo lo que gana uno es lo que no podrá ganar el otro.
En los cooperativos se da una oscilación permanente entre enfrentamiento y cooperación (por ejemplo, negociaciones paritarias), pero los acuerdos se cumplen.

En los no cooperativos no se cumplen acuerdos (ver *equilibrio de Nash*, Capítulo 12)

LA FORMULACIÓN MATEMÁTICA COMPRENDE A JUEGOS BIPERSONALES, FINITOS Y DE SUMA CERO.

Juegos rectangulares

Si tomamos como caso una partida de ajedrez, vemos que existen dos jugadores: Blancas y Negras. Cada uno de ellos puede explicitar un número *n* de estrategias: S_1, S_2,... S_n, para las Blancas. T_1, T_2, T_n para las negras.

Existen tres resultados posibles:

1) Gana Blancas (B),
2) Gana Negras (N),
3) Tablas (O).

Conociendo las estrategias se podría decir cuál es el resultado de la partida. Esta información puede ser llevada a una Matriz de Estrategias: en cada elemento se encuentra el resultado de confrontar la estrategia S_i con la estrategia T_j:

	T1	T2	...	Tn
S1	B	O		
S2	N	N		
...				
Sn				

Donde B es Gana Blancas. N es Gana Negras y O es Tablas.

Para utilizar nomenclatura cuantificable, se puede escribir la misma tabla reemplazando B = Gana blancas por 1; N = Gana Negras por –1 y O = Tablas por 0. Estos valores son arbitrarios, por lo tanto, podrían ser cualquier otro valor convenido. Así construimos la *Matriz de Pagos*:

	T_1	T_2	...	T_n
S_1	1	0		
S_2	–1	–1		
...				
S_n				

Resolver el juego significa poder decir qué estrategia conviene a cada uno de los jugadores y cuál es valor de pago que resulta. Es un problema de optimización: cuál es la jugada óptima y qué valores están en juego.

Hipótesis de Von Neumann

Para poder plantear el caso de dos jugadores, von Neumann formula las siguientes hipótesis previas que se aplican a ambos:

1. tienen intereses opuestos
2. poseen la información completa para construir la matriz de pagos
3. son igualmente sagaces.
4. son conservadores: buscan la máxima seguridad en sus jugadas

Podemos construir una matriz de pagos con los valores que el Jugador II pagaría al I, como la que mostramos en la tabla siguiente:

		II				
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
I	E_1	8	3	5	7	9
	E_2	6	4	3	6	8
	E_3	4	3	5	2	6
	E_4	2	4	1	4	7

El valor de cada estrategia se obtiene teniendo en cuenta las hipótesis y estableciendo para cada una el menor valor posible.

El jugador I elegirá el mínimo de cada fila, con lo que construirá un vector columna.

		II				
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
I	E_1	8	3	5	7	9
	E_2	6	4	3	6	8
	E_3	4	3	5	2	6
	E_4	2	4	1	4	7

En ese vector elegirá ahora el máximo:

I	E_1	3
	E_2	3
	E_3	2
	E_4	1

Siendo las dos celdas de valor 3 el máximo de los mínimos, a los que llamaremos ***vI.***

Por otra parte, el jugador II querrá minimizar los pagos (o, dicho de otra manera, minimizar lo máximo a perder): El jugador II elegirá el mínimo de los máximos de cada columna, construyendo un vector fila:

		II				
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
I	E_1	8	3	5	7	9
	E_2	6	4	3	6	8
	E_3	4	3	5	2	6
	E_4	2	4	1	4	7

II				
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
8	4	5	7	9

vII = 4.

Si tenemos en cuenta que el juego está planteado como una matriz de pagos del Jugador II al I, ***vI*** implica el máximo de lo mínimo que puede ganar para todas sus estrategias y ***vII*** implica el mínimo de lo máximo a perder en todas sus estrategias.

Juego de información completa o estrictamente determinado

Si en la matriz original se cambia la celda [I-E2; II-E3] de su valor original, 3 a un nuevo valor, diferente, supóngase, 8; queda:

		II				
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
I	E_1	8	3	5	7	9
	E_2	6	4	8	6	8
	E_3	4	3	5	2	6
	E_4	2	4	1	4	7

siendo el vector de las filas:

I	E_1	3
	E_2	4
	E_3	2
	E_4	1

donde ***vI*** = 4

y el de las columnas

II				
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
8	4	8	7	9

donde ***vII*** = 4.

Por tanto, ***vI = vII***, lo que significa que lo que el jugador I está dispuesto a ganar es lo que el jugador II está dispuesto a perder. Este juego se denomina **juego de información completa o estrictamente determinado.**

(***vI = vII***).

En estos casos, el juego está ***determinado*** y el punto I = II es el valor del juego y se denomina ***punto de MINIMAX.***

Juego no estrictamente determinado

Si examinamos un caso en que se tiene ***vI*** = 3 y ***vII*** = 4, no está estrictamente determinado. Para una matriz con ***m*** filas (cada una es ***i***) y ***n*** columnas (cada una es ***j***), tendremos

		II					
		1	**2**	**...**	**j**	**...**	**n**
I	**1**	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...	...	...
	i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
	...	...	...	...	...	...	...
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

El jugador I busca el mínimo de cada fila, construye un vector y busca el máximo de ese vector:

$$v_I = \max_i \left(\min_j (a_{ij}) \right)$$

El Jugador II busca el máximo de cada columna, construye un vector en el que busca el mínimo:

$$v_{II} = \min_j \left(\max_i (a_{ij}) \right)$$

Que tengamos la igualdad ***vI = vII*** implica que existe un punto de MINIMAX. Sin embargo, la matriz no tiene por qué tener un punto MINIMAX único: ya que puede haber en varios lugares los mismos valores numéricos.

Si esto ocurre, pueden aparecer varias estrategias óptimas. Si E1, E2, E3, son estrategias óptimas para el jugador I, toda combinación lineal convexa es también una estrategia óptima:

$$E^{*} = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 \quad \text{(lineal)}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{(convexa)}$$

Esta es una manera de darle peso a diferentes E_i.

Cuando existe la desigualdad ***vI*** < ***vII*** se dice que hay **juegos no estrictamente determinados**.

Con una cantidad grande de jugadas, existiendo o no un valor esperado del juego, debe determinarse con qué frecuencia juega cada estrategia. Si llamamos ***x*** a la frecuencia relativa al jugador I e ***y*** a la frecuencia relativa al jugador II, tendremos vectores llamados de ***estrategias mixtas***:

Jugador I: $x = (x_1\ x_2\ x_3)$

Jugador II: $y = (y_1\ y_2\ y_3)$

quedando una matriz como la siguiente:

		II		
		y_1	**y_2**	**y_3**
I	**x_1**	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Cómo elige el Jugador I el vector x

Establecemos un escenario donde el Jugador I, juega con vector ***x***, Jugador II juega con estrategia 1: E(x,1)

- Si el jugador II juega la estrategia E_1, la ganancia esperada será:

$$E(x,1) = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = \sum_{i}^{n} a_{i1}x_i \qquad (\boldsymbol{y_1})$$

- Si el jugador II juega con la estrategia E_2

$$E(x,2) = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = \sum_{i}^{n} a_{i2}x_i \qquad (\boldsymbol{y_2})$$

- y con la estrategia *E₃*

$$E(x,3) = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = \sum_{i}^{n} a_{i3}x_i \qquad (\boldsymbol{y_3})$$

Luego, la ganancia esperada del Jugador I será:

$$GEI = E(x,1)y_1 + E(x,2)y_2 + E(x,3)y_3 = E(x,y)$$

$$GEI = E(x,y) = \sum_{j}\left(\sum_{i} a_{ij}x_i\right)y_j$$

Planteo para el jugador II

Se trabaja con el vector ***y***, haciendo un análisis como el anterior:

$$E(1,y) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = \sum_{j}^{m} a_{1j}y_i$$

$$E(2,y) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = \sum_{j}^{m} a_{2j}y_i$$

$$E(3,y) = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = \sum_{j}^{m} a_{3j}y_i$$

pero con el vector ***x*** de frecuencias relativas. La Pérdida Esperada por II será

$$PEII = E(1,y)x_1 + E(2,y)x_2 + E(3,y)x_3 = E(x,y)$$

$$PEII = E(x,y) = \sum_{i}\left(\sum_{ji} a_{ij}y_j\right)x_i$$

Existirá un vector ***x*** optimo: y un vector ***y*** óptimo que darán un valor de juego E(,) que es único. Este valor es el teorema de Von Neuman (MINIMAX para juego no estrictamente determinado).

Ejemplo

Tenemos una matriz como la siguiente:

		II		
		y1	**y2**	
I	**x1**	5	–3	–3
	x2	–6	8	–6
		5	8	

donde

$\boldsymbol{vI}$ = —3

$\boldsymbol{vII}$ = 5

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$

$E(x,1) = a_{21}x1 + a_{21}x_2 = 5\ x_1 — 6x_2$

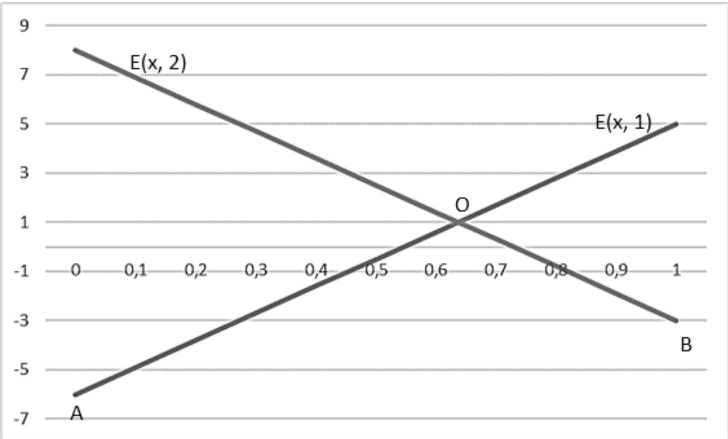
$E(x,2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = —3\ x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 = 1$

Si se grafica E(x,j) vs x_1, de donde $x_2 = 1 — x_1$ resulta

$E(x,1) = 5\ x_1 — 6\ (1 — x_1) = 11\ x_1 — 6$

$E(x,2) = —3\ x_1 + 8\ (1 — x_1) = —11\ x_1 + 8$



AOB es el lugar geométrico de las mínimas ganancias esperadas.
El máximo de todos los mínimos es el punto O, cuyas coordenadas son

$x'_1 = 7/11$

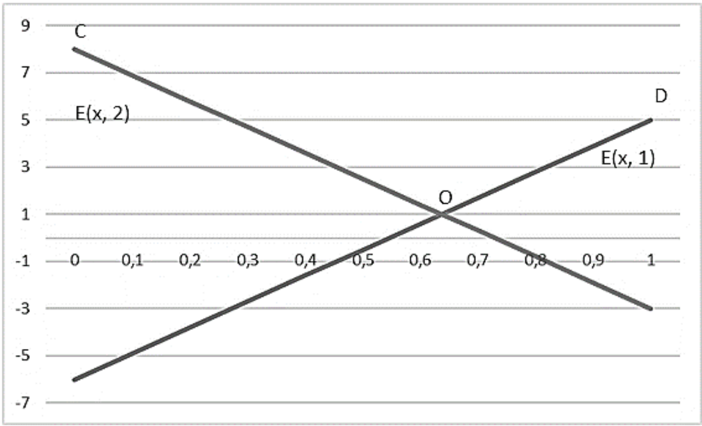
$x'_2 = 4/11$

Valor del juego = $E(x'_1, 1) = E\ (x'_1, 2) = 1 = \boldsymbol{vI}$.

Para el jugador II

$$E(1, y) = 5\ y_1 + (—3)\ y2$$
$$E(2, y) = 6\ y_1 + 8\ y_2$$
$$y_2 = 1 — y_1$$

$$E(1, y) = 8\ y_1 — 3$$
$$E(2, y) = —14\ y_1 + 8$$



COD es el lugar geométrico de las máximas pérdidas de II. Como se busca minimizar las pérdidas corresponde al punto O: y'_1 = 0,5

vI = vII = E(x, y).

Resolución en WinQSB

Seleccionaremos en el módulo *Análisis de Decisiones* (*Decision Analisys*) los **Juegos de suma cero** (*Two player. Zero-sum game*) que aparecen en el menú "**Nuevo Problema**". Así dispondremos de la siguiente pantalla de carga, donde debemos especificar que tenemos dos jugadores y dos estrategias:

Player1 \ Player2	Strategy2-1	Strategy2-2
Strategy1-1	5	-3
Strategy1-2	-6	8

Obteniéndose el siguiente resultado:

08-24-2007	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	Strategy1-1	Not Dominated	
2	1	Strategy1-2	Not Dominated	
3	2	Strategy2-1	Not Dominated	
4	2	Strategy2-2	Not Dominated	
	Player	Strategy	Optimal Probability	
1	1	Strategy1-1	0,64	
2	1	Strategy1-2	0,36	
1	2	Strategy2-1	0,50	
2	2	Strategy2-2	0,50	
	Expected	Payoff	for Player 1 =	1,00

Donde se ve que cada jugador dispone de una probabilidad asociada a su estrategia (7/11, 4/11, 1/2 y 1/2, respectivamente) y el valor del juego queda determinado en 1.

Estrategia mixta

Es la regla de decisión que permite elegir una estrategia cuando el juego no está estrictamente determinado.

Teoría de juegos y programación lineal

Supongamos la siguiente matriz de pagos

		II	
		y_1	y_2
I	x_1	a_{11}	a_{12}
	x_2	a_{21}	a_{22}

Si I juega una estrategia mixta al máximo de los mínimos, ***vI***, es lo que menos recibe:

$$min \sum_i a_{ij} x_j = v_I = v$$

significa que como mínimo recibe ***v***, por lo tanto

$E(x,j) \geq \boldsymbol{v}$

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \geq \boldsymbol{v}$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \geq \boldsymbol{v}$

como ***v*** es funcional y además $x_1 + x_2 = 1$, dividiendo por ***v*** se origina una nueva variable

$x'_i = x_i/\boldsymbol{v}$

$z = \boldsymbol{v}^{-1}$

El programa lineal es

$$z = \frac{1}{v} = x'_1 + x_2 \equiv MIN$$

$$a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 \geq 1$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 \geq 1$$

el valor del juego, ***v***, es la inversa del funcional ***z***., por lo que deberá interpretarse la solución del problema para el cálculo de x_1 y de x_2.

El dual permite calcular y_1 e y_2 dado que $c_j - Z_j$ de las slacks corresponden a los valores y'_1 e y'_2.

Este modelo puede ser generalizado. Para el ejemplo anterior:

		II		
		y1	**y2**	
I	**x1**	5	–3	–3
	x2	–6	8	–6
		5	8	

$$z = x'_1 + x'_2 \equiv \text{MIN } (=v^{-1})$$

$$5x'_1 + (-6)\,x'_2 \geq 1$$

$$-3x'_1 + 8\,x'_2 \geq 1$$

$$5x'_1 - 6\,x'_2 - x'_3 + \lambda_1 = 1$$

$$-3x'_1 + 8\,x'_2 - x'_4 + \lambda_2 = 1$$

Ejemplo I

Dos jugadores muestran simultáneamente 1, 2 o 3 dedos uno al otro. Si la suma es par, el jugador II paga al I esa suma en dinero. Si es impar el jugador II recibe esa suma.

a) Construcción de la matriz de pagos y del valor del juego

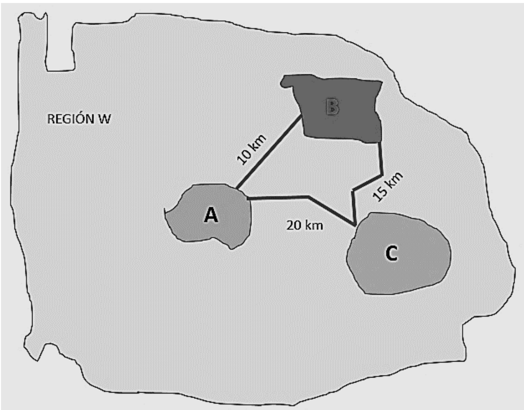
		II			
		E1	**E2**	**E3**	min
I	**E1**	2	–3	4	–3
	E2	–3	4	–5	–5
	E3	4	–5	6	–5
	max	4	4	6	

$\boldsymbol{v_I} = \max_j (\min_i a_{ij}) = -5$
$\boldsymbol{v_{II}} = \min_{jj}(\max_{ij} a_{ij}) = 4$
Se debe hallar $\boldsymbol{v} = E(x,y)$, siendo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ los vectores óptimos.

Ejemplo II

Dos cadenas de supermercados se proponen construir cada una un supermercado en la región W, que incluye tres ciudades. Aproximadamente el 45% de la población de W vive cerca de la ciudad A, 35% cerca de la B y 20% de la C. La cadena I es más prestigiosa y grande que la II, por lo que controlará la mayoría del negocio siempre que sus ubicaciones sean comparativas. Ambas cadenas conocen los intereses de la otra y ambas han terminado estudios de mercado que dan proyecciones idénticas.

Si ambas cadenas se sitúan en la misma ciudad o equidistantes de una, la I controlará el 65% del negocio de esa ciudad. Si la I está más cerca de una ciudad que la II, controlará el 90% del negocio de esa ciudad. En cambio, si la I se encuentra más alejada de una ciudad que la II, atraerá el 40% del negocio de ese pueblo. El resto de las operaciones, bajo cualquier circunstancia, irá a la cadena II.



La política de la cadena I, conocida por la II, es no ubicarse en lugares con menos de 20.000 habitantes, lo que desecha la posibilidad de hacerlo en la ciudad B, que tiene 15.000.

Plantear la matriz de pagos.

Capítulo 12. Teoría de juegos. Juegos no cooperativos

“Ahora parece que he vuelto a pensar racionalmente de nuevo, en el estilo característico de los científicos. Sin embargo, eso no es algo de lo que haya que alegrarse como si alguien con alguna limitación física hubiera recuperado su buena salud. Un aspecto de esto es que la racionalidad del pensamiento impone un límite al concepto que tiene una persona de su relación con el cosmos. Por ejemplo, un no-zoroastriano podría considerar a Zaratustra simplemente como un loco que arrastró a millones de ingenuos seguidores a un culto de adoración ritual del fuego. Pero sin esa "locura" Zaratustra habría sido solo otro de los millones o billones de individuos que han vivido y después han sido olvidados”.

John F. Nash, Autobiografía tras la concesión del Premio Nobel, 1994

En 1994 se otorgó el Premio Nobel en Economía a Nash, Harsanyi y Selten[8] por sus desarrollos en el campo de la teoría de juegos. La economía tradicional se ha basado casi exclusivamente en perspectivas provenientes de la competencia perfecta y el monopolio como casos polares y la competencia monopolística como combinación de ambos, excluyendo el problema de la competencia real. Tanto en la competencia perfecta como en el monopolio todo está en equilibrio y no hay amenazas de entrada de nuevos competidores, de guerra de precios, de nuevas tecnologías o de nuevas políticas gubernamentales, ni interacciones entre las reacciones y decisiones de los participantes en el mercado en condiciones usuales estáticas de corto plazo. A pesar de los antecedentes en la teoría económica en términos de reacciones e interacciones entre los participantes, es un hecho que el pensamiento económico ha estado dominado en los análisis en períodos cortos por las visiones de la competencia perfecta — donde la competencia ya se dio — y el monopolio, donde por definición no se puede dar. Por supuesto, tanto en el caso del monopolio puro como en el de los carteles, los economistas han estado conscientes de la posibilidad de que a mediano y largo plazos, la perspectiva de la sustitución tecnológica, de los consumos o la entrada de nuevos productores, erosionen los modelos usados, pero los modelos polares, en base sobre todo a su mayor simplicidad y determinación de resultados y a que las inferencias analíticas no difieren substancialmente de los modelos mixtos, han dominado la manera de pensar.

La mayor importancia de las estructuras de mercado de pocos productores, de la competencia global y de las decisiones de política económica entre algunos dirigentes dentro y entre países, han puesto de manifiesto la necesidad de estudiar situaciones en las que hay estrategias. Una empresa toma sus decisiones de precios o de expansión de su producción tomando en cuenta las reacciones de sus posibles competidores, que a su vez actúan considerando las reacciones de los demás. Esto es en esencia la

[8] Ver, al fin de este capítulo, "*Nota sobre el Premio Nobel de Economía 1994*"

competencia estratégica, que caracteriza precisamente la toma de decisiones en muchos e importantes casos de la economía y la política económica de los países.

La ausencia de rigor y de resultados definidos en los modelos de pocos participantes inhibió en el pasado el pensamiento estratégico formal en la economía. Con el desarrollo de la teoría de juegos por los autores distinguidos con el Nobel de Economía en 1994 se ha creado un instrumento matemático apropiado para la competencia estratégica, con el resultado previsible de impulsar tanto el análisis matemático como el analítico de las decisiones estratégicas, tomando más en serio la competencia entre pocos.

Asimismo, al reconocer formalmente la existencia de equilibrios potenciales múltiples, la posibilidad de resultados alternativos posibles, dependiendo de situaciones probables o inciertas (situaciones riesgosas o con incertidumbre), alienta la credibilidad de enfoques previos en esta dirección y amplía las perspectivas en el análisis de las decisiones económicas, de política económica y de economía política.

Los principios para aplicar la teoría de juegos a la economía fueron presentados por Oskar Morgenstern y John Von Neumann en su *Teoría de Juegos y el Comportamiento Económico* (1944) (Ver Capítulo 11). Nash distinguió entre juegos cooperativos, en los que existen acuerdos que se cumplen, y no cooperativos, donde no hay acuerdos o no se cumplen. El equilibrio de Nash se refiere al equilibrio de juegos no cooperativos en los que los jugadores tienen información completa de las ganancias esperadas y de las estrategias de los participantes.

El punto de equilibrio de Nash es una situación en la que ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia ya que cualquier cambio implicaría una disminución en sus pagos. La solución de Von Neumann y Oskar Morgenstern era similar pero sólo para los juegos de suma cero. Para la descripción formal del problema y su solución, Nash utilizó funciones de mejor respuesta y el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani.

En los años siguientes publicó nuevos escritos con originales soluciones para algunos problemas matemáticos y de la teoría de juegos, entre ellas, la "solución de regateo de Nash" para juegos bipersonales cooperativos. Propuso también lo que se ha dado en llamar "el programa de Nash" para la reducción de todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo.

Así, los equilibrios no cooperativos múltiples encontrados por Nash han sido clarificados por Selten, quien desarrolló los factores dinámicos, al eliminar los que no son razonables en términos económicos. Por ejemplo, una situación macroeconómica típica de desequilibrio externo con desempleo puede considerarse un equilibrio de Nash, en tanto los inversores extranjeros estén dispuestos a financiar el déficit, de otro modo no. En el caso del equilibrio con desempleo, un mal equilibrio es a pesar de ello un equilibrio de Nash, en tanto no sean creíbles las amenazas de los afectados por deshacer el juego y romper las estrategias. Selten trabajó suponiendo que se conocen las probabilidades de los diferentes eventos, analizando también juegos con probabilidad de errores en el juego y su impacto en el equilibrio.

Harsanyi prosiguió el mejoramiento de la teoría de juegos considerando situaciones en las que no se conocen completamente las retribuciones de las estrategias o las estrategias mismas. Es decir, juegos con ignorancia, incertidumbre o información incompleta.

> La teoría de juegos puede contribuir a vencer la cerrazón y esterilidad del pensamiento determinista, mecánico y dogmático, quizá no tanto en términos exclusivamente matemáticos, por la enorme dificultad de formalizar matemáticamente situaciones relativamente sencillas, sino como modos y actitudes de ver la realidad. Es probable que esta sea la contribución más importante de la teoría de juegos.

Todo esto lleva, indirectamente, a poner en claro aspectos incomprendidos de la teoría Keynesiana, como diagnosticar el desempleo como situación de equilibrio bajo incertidumbre, incomprensión que ha degradado el pensamiento de Keynes e induciendo políticas económicas incongruentes con las reglas mismas del sistema económico capitalista.

La teoría de juegos es aplicable, y ha sido aplicada, en general, en toda decisión de pocos participantes en interacción, con información completa, probable o incierta. Por ejemplo: al resultado de licitaciones, al análisis de estrategias industriales, al comportamiento de los bancos centrales, etc.. También en la definición de reglas que eviten conductas depredatorias, por ejemplo, en la licitación pública de derechos en ramas que requieren de la protección de la amenaza de competidores potenciales para que sea atractiva (Por razones tecnológicas, del consumo del bien, etc.).

Al clarificar la existencia de equilibrios estables pero malos y la posibilidad de resultados no deterministas, abre el horizonte para considerar alternativas no dogmáticas, con equilibrios subóptimos o de sub juegos. En esos casos habría que buscar nuevos arreglos, pero evaluando racionalmente los costos y resultados de diferentes opciones.

El desarrollo de instituciones, leyes, arreglos organizacionales, ideas e ideologías, programas y políticas que fomenten la creatividad y cooperación sobre bases realistas, es un panorama en el que muchos pensadores han creído como parte de su visión del mundo y que, con el prestigio y rigor analítico de la teoría de juegos, gana credibilidad.

El dilema de los prisioneros

El escenario de partida es: dos delincuentes son detenidos y encerrados, separados e incomunicados. El fiscal sospecha que han participado en el robo de un banco, delito cuya pena es diez años de cárcel, pero no tiene pruebas. Sólo tiene pruebas, y puede culparlos, de un delito menor: tenencia ilegal de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Promete a cada uno de ellos que reducirá su condena a la mitad si proporciona las pruebas para culpar al otro del robo del banco.

Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma de matriz de pagos. La estrategia "***lealtad***" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas para acusar al compañero. Por tanto, "***traición***", es la estrategia alternativa.

Dilema del Prisionero Matriz de Pagos (años de cárcel)		**Prisionero Y**	
		Lealtad	Traición
Prisionero X	Lealtad	2/**2**	10/**1**
	Traición	1/**10**	5/**5**

Los pagos a la izquierda o a la derecha de la barra indican los años de cárcel a los que es condenado el preso X o el Y respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos. Por ejemplo, si el prisionero X optó por lealtad y el prisionero Y por traición, a X le corresponden 10 años y a Y le corresponde 1 año. (10/1)

En vez de expresar los pagos en años de cárcel, se puede indicar simplemente el orden de preferencia de cada preso de los correspondientes resultados, con lo que el modelo pasa a tener aplicación más general.

Dilema del Prisionero Matriz de Pagos (orden de preferencias)		**Prisionero Y**	
		Lealtad	Traición
Prisionero X	Lealtad	2/**2**	4/**1**
	Traición	1/**4**	3/**3 (*)**

La aplicación de la estrategia *maximín* conduce, en este juego, a un resultado subóptimo. Al no conocer la decisión del otro prisionero, la estrategia más segura es traicionar. Suponga que uno de ellos cree que el otro va a ser leal, X ➔ Lealtad. En ese caso, si Y traiciona, Y tiene la menor condena. Pero si cree que el otro también va a traicionar (X ➔ traición), sigue teniendo Y la menor condena al traicionar. Sin embargo, si ambos decidiesen cooperar y permanecer en silencio, ambos serían liberados en sólo 2 años.

Si ambos traicionan, el resultado para ambos es peor que si ambos hubieran elegido la lealtad. Este resultado es un punto de equilibrio de Nash y está señalado en la matriz mediante un asterisco. Como se ve, es un resultado peor que el “cooperativo” (ambos leales)

Aquí se encuentra el punto del dilema. El resultado de las interacciones individuales produce un resultado que no es óptimo ya que existe una situación tal que la utilidad de uno o de ambos prisioneros podría mejorar sin que signifique un empeoramiento para el otro. En otras palabras, el resultado en el cual ambos prisioneros no traicionan domina al resultado en el cual los dos eligen hacerlo.

El dilema del prisionero es un juego de suma no nula, bipersonal, biestratégico y simétrico. Fue formalizado y analizado por primera vez por A. W. Tucker en 1950. Es posiblemente el juego más conocido y estudiado en la teoría de juegos. En base a él se han elaborado multitud de variaciones, muchas de ellas basadas en la repetición del juego y en el diseño de estrategias reactivas.

Duopolios y Teoría de Juegos[9]

En el oligopolio, los resultados que obtiene cada empresa dependen no sólo de su decisión sino de las decisiones de las competidoras. El problema para el empresario, por tanto, implica una elección estratégica que puede ser analizada con las técnicas de la Teoría de Juegos.

Suponga que dos empresas, Hipermercados Zonda y Almacenes Yuste, constituyen un duopolio local en el sector de los grandes almacenes. Cuando llega la época de las tradicionales rebajas de julio, ambas empresas acostumbran a realizar inversiones en publicidad tan altas que suelen implicar la pérdida de todo el beneficio. Este año se han puesto de acuerdo y han decidido no hacer publicidad por lo que cada una, si cumple

[9] Extractado de Martínez Coll, Juan Carlos (2001): "*La teoría de juegos*" en ***La Economía de Mercado, virtudes e inconvenientes***
http://www.eumed.net/cursecon/8/La%20Teoria%20de%20Juegos.htm consultado marzo 2018.

el acuerdo, puede obtener unos beneficios en la temporada de 50 millones. Sin embargo, una de ellas puede preparar en secreto su campaña publicitaria y lanzarla en el último momento con lo que conseguiría atraer a todos los consumidores. Sus beneficios en ese caso serían de 75 millones mientras que la empresa competidora perdería 25 millones.

Los beneficios o pérdidas mostrados a la izquierda de cada casilla son los que obtiene Zonda cuando elige la estrategia mostrada a la izquierda y Yuste la mostrada arriba. Los resultados a la derecha en las casillas son los correspondientes para Yuste.

		Yuste	
		Cooperar	Traicionar
Zonda	Cooperar	50/50	–25/75
	Traicionar	75/–25	0/0

El que lo máximo que se puede obtener sea 75 o 85 no tiene mucha influencia sobre la decisión a adoptar, lo único que importa en realidad es la forma en que están ordenados los resultados. Si substituimos el valor concreto de los beneficios por el orden que ocupan en las preferencias de los jugadores, la matriz queda como la mostrada en el cuadro. Las situaciones como las descritas en esta matriz son muy frecuentes en la vida real y se caracterizan como el Dilema de los Prisioneros visto en el punto anterior.

		Yuste	
		Cooperar	Traicionar
Zonda	Cooperar	2°/2°	4°/1°
	Traicionar	1°/4°	3°/3°(*)

El director de Zonda pensará: "Si Yuste no hace publicidad, a nosotros lo que más nos conviene es traicionar el acuerdo, pero si ellos son los primeros en traicionar, a nosotros también nos convendrá hacerlo. Sea cual sea la estrategia adoptada por nuestros competidores, lo que más nos conviene es traicionarles".

El director de Yuste hará un razonamiento similar. Como consecuencia de ello ambos se traicionarán entre sí y obtendrán resultados peores que si hubieran mantenido el acuerdo. La casilla de la matriz de pagos marcada con un asterisco es la única solución estable: es un punto de equilibrio de Nash. Contrariamente a las argumentaciones de Adam Smith, en las situaciones caracterizadas por el Dilema de los Prisioneros si los jugadores actúan buscando de forma racional su propio interés, los conducirá a un resultado socialmente indeseable.

Modelo halcón paloma

Se suele denominar como *halcón* a los partidarios de estrategias más agresivas mientras que son *paloma* a aquellos que tratan de evitar o apaciguar los conflictos o a los pacifistas. El modelo *Halcón-Paloma* sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el "*hawk-dove*" o el "*chicken*".

Supongamos una situación ligeramente diferente a la anterior. Si ambas empresas se enredan en una guerra de precios, haciendo cada vez mayores rebajas, ambas sufrirán importantes pérdidas, 25 millones cada una. Han llegado al acuerdo de no hacer rebajas con lo que cada una podrá ganar 50 millones. Si una de ellas, incumpliendo el acuerdo, hace en solitario una pequeña rebaja, podrá obtener un beneficio de 75 millones mientras que la otra perdería muchos clientes quedándose sin beneficios ni pérdidas.

		Yuste	
		Cooperar	Traicionar
Zonda	Cooperar	50/50	0/75
	Traicionar	75/0	–25/–25

Si, como en el caso anterior, substituimos los valores concretos por su orden en la escala de preferencias obtenemos una matriz que es conocida en Teoría de Juegos como Gallina o Halcón-Paloma.

		Yuste	
		Cooperar	Traicionar
Zonda	Cooperar	2°/2°	3°/1°(*)
	Traicionar	1°/3°(*)	4°/4°

El razonamiento de los estrategas será ahora diferente: "Si nuestros competidores cooperan, lo que más nos interesa es traicionarles, pero si ellos nos traicionan será preferible que nos mostremos cooperativos en vez de enredarnos en una guerra de precios. Hagan lo que hagan ellos, nos interesará hacer lo contrario".

En el juego "*Gallina*" el orden en que actúen los jugadores es muy importante. El primero en intervenir decidirá Traicionar, forzando al otro a Cooperar y obteniendo así el mejor resultado. La solución de equilibrio puede ser cualquiera de las dos marcadas con un asterisco en la matriz de pagos, dependiendo de cuál haya sido el primer jugador en decidirse. Ambas soluciones son puntos de equilibrio de Nash.

En casi todos los modelos, sea cual sea la forma de la matriz, el protocolo o reglas del juego influirá mucho en la solución. Además del orden de intervención de los jugadores, habrá que tener en cuenta si el juego se realiza una sola vez o si se repite cierto número de veces, la información de que disponen en cada momento, el número de jugadores que intervienen y la posibilidad de formar coaliciones, etc.

En las películas de Hollywood se han representado en varias ocasiones desafíos de vehículos enfrentados que siguen este modelo. Los dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvíe ha perdido. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía...

También se ha utilizado este modelo abundantemente para representar la guerra fría. La estrategia *Halcón* consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. El resultado puede modelizarse con la siguiente matriz de pagos.

		Jugador Y	
		Cooperar	Traicionar
Jugador X	Cooperar	2°/2°	3°/1°(*)
	Traicionar	1°/3° (*)	4°/4°

Obsérvense las sutiles pero importantes diferencias de este modelo con el Dilema del Prisionero. En principio la matriz es muy parecida, simplemente se han trocado las posiciones de los pagos 3º y 4º, pero la solución y el análisis son ahora muy diferentes.

Hay aquí dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; en la matriz aquí representada esas soluciones están marcadas con un asterisco. Compruébese, por el contrario, que en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash está en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestará la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

Modelo de la Guerra de los Sexos

El modelo de "La guerra de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana.

Hay dos jugadores: "ÉL" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "***Fútbol***" y "***Shopping***".

Supongamos que el orden de preferencias de **ÉL** es el siguiente:

1º (lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Fútbol.
2º ÉL y ELLA eligen Shopping.
3º ÉL elige Fútbol y ELLA elige Shopping.
4º (lo menos preferido) Él elige Shopping y ELLA elige Fútbol.

Supongamos que el orden de preferencias de **ELLA** es el siguiente:

1º (lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Shopping.
2º ÉL y ELLA eligen Fútbol.
3º ÉL elige Fútbol y ELLA elige Shopping.
4º (lo menos preferido) Él elige Shopping y ELLA elige Fútbol.

La matriz de pagos es la que sigue:

		ELLA	
		Fútbol	Shopping
EL	Fútbol	1/2	3/3(*)
	Shopping	4/4	2/1
Los pagos representan el orden de preferencias. A la izquierda de la barra, los pagos a EL. A la derecha los pagos a ELLA			

Los pagos representan el orden de preferencias. A la izquierda de la barra, los pagos a EL. A la derecha los pagos a ELLA

Este juego, así planteado, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vas al fútbol te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia ***maximín*** el pago que recibirán (3\3) es subóptimo. Esa solución, marcada en la matriz con un asterisco, no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando ELLA llegue al Shopping y observe que ÉL se ha ido al fútbol, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

El modelo que hemos visto es un juego simétrico ya que jugadores o estrategias son intercambiables sin que los resultados varíen. Podemos introducir una interesante modificación en el juego convirtiéndolo en asimétrico a la vez que nos aproximamos más al mundo real. Supongamos que las posiciones 2ª y 3ª en el orden de preferencias de ÉL se invierten. ËL prefiere ir solo al Fútbol más que ir con ELLA al Shopping. La matriz de pagos queda como sigue:

		ELLA	
		Fútbol	Shopping
EL	Fútbol	1/2(*)	2/3
	Shopping	4/4	3/1

Si ELLA conoce la matriz de pagos, es decir, las preferencias de ÉL, el problema de coordinación desaparece. Suponemos que ÉL elegirá siembre la estrategia Fútbol, sea cual sea la elección de ELLA. Sabiendo esto, ELLA elegirá siempre la estrategia Fútbol también, ya que prefiere estar con ÉL aunque sea en el Fútbol que estar sola aunque sea en el Shopping. La estrategia ***maximín*** de ambos jugadores coincide. El resultado, marcado con un asterisco, es un óptimo, un punto de silla, una solución estable, un punto de equilibrio de Nash. Obsérvese que esta solución conduce a una situación estable de dominación social del jugador que podríamos calificar como ***el más egoísta***.

Nota sobre el Premio Nobel de Economía de 1994

El premio Nobel de Economía de 1994 fue otorgado a *Nash, Harsanyi y Selten* por contribuciones al campo de la teoría de juegos, como señalamos en la página 1 de este capítulo.

John F. Nash era estadounidense, nació en 1928, falleció en 2015. Licenciado y Master por el *Carnegie Institute of Technology*, doctorado por *Princeton*. Fué Profesor en el *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) de 1951 a 1959.

Desde niño mostró una extraordinaria capacidad intelectual y dificultades para relacionarse con la gente, que fue su característica en toda su vida.

En junio de 1945 ingresó en el Instituto *Carnegie* para estudiar Ingeniería Química y comenzó a destacar en Matemáticas. En 1948 fue becado por la *Universidad de Princeton* para realizar su doctorado en Matemáticas, donde trabajaban en ese momento personalidades como Einstein o Von Neumann, lo que hizo aumentar su ansia por superarse a sí mismo y a los demás y por ser reconocido. En 1949, propuso el sistema de equilibrio de mercados (vigente actualmente), rebatiendo las teorías de Adam Smith. A los veintiún años, en 1950, se doctoró con una tesis de menos de treinta páginas sobre "Juegos No-Cooperativos", lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash", que tuvo un inmediato reconocimiento. En ese momento comenzó a trabajar en la *RAND*.

En 1958, cuando la enfermedad era ya manifiesta, le diagnosticaron esquizofrenia, aunque llevaba años desarrollándose. Fue internado por varios días en 1959 y en otras oportunidades. Recibió el premio Nobel de economía en 1994.

Sus teorías han influido en las negociaciones comerciales globales, en los avances en Biología evolutiva, o en las relaciones laborales nacionales.

Varios años después, regresó a la Universidad. Hasta alrededor de 2011 impartía clases de matemáticas y tenía una página web activa. Falleció en 2015 a los 86 años mientras viajaba en un taxi que tuvo un accidente de tránsito. Su vida se resume en la película de 2001 “Una mente brillante” (*A Beautiful Mind*), con Russell Crowe en el papel de Nash y ganadora de varios premios Oscar

John C. Harsanyi. Nació en Budapest, Hungría en 1920. Emigró a Estados Unidos de América en 1961. Murió en 2000 en Berkeley, California, EE. UU.

Se destacó desde la escuela secundaria en el área de las matemáticas y física, llegando a ganar premios. Lo enviaron a Francia en 1939 para inscribirse en ingeniería química en la Universidad de Lyon, regresando a Hungría a causa del inicio de la Segunda Guerra Mundial, donde estudió farmacología en la Universidad de Budapest lo que además le permitió evitar el servicio militar que, para un judío (era católico, pero con ascendencia) significaba trabajos forzados, aunque posteriormente terminó siendo obligado a realizar esos trabajos forzados en el frente este, logrando escapar cuando los alemanes estaban por enviarlo a un campo de concentración.

Después de la guerra, volvió a la Universidad de Budapest para hacer un doctorado en filosofía y sociología y estudió teología. Fue expulsado, posteriormente, por ser antimarxista. Debiendo huir del país en 1950.

En la *Universidad de Sydney* estudió economía por la noche recibiendo un Máster en 1953 y publicó trabajos de investigación en revistas económicas.

En 1956, recibió una beca que le permitió viajar a los Estados Unidos, a la Universidad de Stanford, donde escribió un ensayo sobre la teoría de juegos bajo la supervisión de Kenneth Arrow, logrando un segundo doctorado en economía en 1959, accediendo al cargo de profesor de economía en la *Wayne State University* en Detroit entre 1961-1963. En 1964, se trasladó a Berkeley, California, y permaneció en la Universidad hasta que se retiró en 1990. Allí hizo investigaciones en teoría del juego y formó parte de un equipo de teóricos de juegos encargados de asesorar a la *Agencia de Control de Armas y Desarme* de los Estados Unidos en colaboración con la *Universidad de Princeton* dirigidos por Harold Kuhn y Oskar Morgenstern.

Reinhard Selten. Alemán, nacido en 1930. Licenciado y doctorado por la *Universidad de Frankfurt*. Profesor en la *Universidad Libre de Berlín, Universidad de Bielefeld* y en la de *Bonn*. Recibió el premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas. Murió en Polonia a los 86 años en 2016

En base a los trabajos previos de Nash, analizó los llamados juegos de sociedad, como el póker o el ajedrez, en los que se utilizan estrategias basadas en lo que harán los adversarios, formulando matemáticamente el comportamiento de protagonistas racionales, sus estrategias de decisión y formas de actuación en situaciones competitivas. Cuando le otorgan el Premio Nobel de Economía, la Academia elogia "*su análisis del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos*". Se puede decir que perfecciona el equilibrio de Nash para analizar la dinámica de la interacción de estrategias.

El ***equilibrio de Selten*** se convirtió en la noción de equilibrio de referencia para juegos secuenciales. Posteriormente publicó un artículo mostrando que, si bien su equilibrio perfecto tenía sentido desde el punto de vista de la lógica matemática, su capacidad predictiva del comportamiento real de las personas no era muy grande.

También desarrolló otros modelos de racionalidad limitada y estudios experimentales para aplicar estos modelos y verificarlos. En contra del modelo racional de toma de decisiones (que parte de suponer a las entidades y personas con preferencias definidas sobre las opciones disponibles, que son optimizadas sin variaciones de comportamiento), sostiene que esta visión está muy alejada de la realidad y trata de ofrecer modelos alternativos más realistas corroborados por estudios prácticos experimentales.

Aunque su definición de la teoría de juegos es considerarla un análisis matemático que modeliza los conflictos en competencia, incorpora la novedad conceptual de señalar que algunos aspectos de esa teoría deben tener en cuenta aportes procedentes de la psicología, porque estudia los intereses de la gente y trata de explicar lo que cada uno hace en función de ese interés y de las circunstancias.

Respecto a los juegos cooperativos los definía como aquellos en que cada negociador (jugador) debe empezar por ceder en algo para que todos obtengan más de lo que tenían antes de empezar a negociar (jugar). El concepto fue que todos ceden, pero todos acaban ganando más de lo que ceden.

Es considerado como uno de los padres de la economía experimental. Desarrolló un ejemplo de un juego llamado "El caballo de Selten".

Referencias Bibliográficas del Libro 2

HILLIER, F. S. y M. S. Hillier. “Introduction to manegement science: a modeling and case studies approach with spreadsheets” 2. ed. Mc Graw Hill, Burr Ridge, Il. 2003

MURTHY, D. N. P., W. P. Page y E. Y. Rodin, “Mathematical modeling: a tool for problem solving in engineering, physical, biological and social sciences”. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra, 1990

WOLSEY, l. A., “Strong formulations for mixed integer programs: valid inequalities and extended formulations”. Mathematical Programming Series b, 97(1-2), 2003

ABBAS, A.E. y R.A. Howard, “Foundations of decision analysis” Amazon Kindle Ed. Global. Pearson ed. Essex, inglaterra. 2016

YOUNG P. y S. Zamir. Handbook of game theory, volume 4. (handbook). Elsevier. Oxford, Inglaterra, 2015.