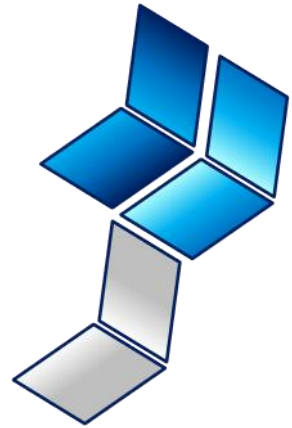




LIBRO 1

Programación Lineal



Optimiza12

Libro 1

Programación Lineal

Ing. Alejandro Roberti

Ing. Gustavo Chijani – Ing. Verónica Esain – Ing. Esteban Gidekel

2019

Edición de los autores. Mayo 2019 — Derechos reservados.

Diseño de portada: aero@optimiza.org

Versión digital disponible (e-book) <http://optimiza.org>

ÍNDICE

Presentación	I
Capítulo 1. Introducción.	1
Investigación operativa	1
Sistemas, Modelos y Problemas	6
Sistema	6
Modelos	8
Definición del Problema	11
Desarrollo de un modelo matemático y recolección de datos.	12
Variables de decisión y función objetivo	12
Restricciones	13
Resolución del modelo matemático.	14
Comprobación de la validez de la solución hallada.	15
Usos de los modelos	15
Técnicas para construir modelos matemáticos	16
Planeamiento de la producción en Alcoholes Argentinos (AA).	16
Primera etapa: Identificación de las variables de decisión	17
Segunda etapa: Identificación de datos del problema	18
Tercera etapa: Formulación de la función objetivo.	19
Cuarta etapa: Identificación de las restricciones.	20
Problemas de redes	22
Identificación de las variables de decisión	24
Identificación de restricciones.	25
Problemas con variables binarias. 26	
Identificación de las variables de decisión	27
Identificación de la función objetivo	27
Identificación de las restricciones	28
Planteo del modelo completo:	29
Noticias Históricas	30
George Dantzig	30
Segunda Guerra Mundial	30
La guerra de Vietnam	31
Capítulo 2. Programación Lineal. Método Gráfico	33
Planeamiento de la producción en Alcoholera Argentina.	33
¿Cómo hallar una solución? Una aproximación heurística.	34

Gráfica de restricciones	36
Casos especiales	41
Análisis de sensibilidad gráfico	42
Análisis de sensibilidad de los coeficientes del funcional	42
Análisis de sensibilidad para los valores del lado derecho	46
Análisis paramétrico de los valores del lado derecho	52
Capítulo 3. Programación Lineal. Algoritmo Simplex Dantzig	57
Conversión a la forma normalizada	59
Desigualdades del Tipo I	59
Desigualdades del Tipo II	60
Adecuación del funcional	60
Conversión del algoritmo en forma geométrica a la forma algebraica	62
Enfoque formal.	69
Modelo general	69
Desarrollo del método Simplex – Dantzig	71
Costo de oportunidad	74
Método de las dos fases	79
Interpretación de los modelos	81
Análisis de Sensibilidad o Análisis Post Óptimo	85
Límites de variación de los términos independientes.	85
Límites de variación de Coeficientes y recursos	88
Dualidad	89
Pasos para convertir un Primal en Dual	89
Capítulo 4. Software para resolver modelos	93
WINQSB	95
Complementos útiles	105
Cambios en un Parámetro (Análisis de Sensibilidad)	106
Análisis Paramétrico	107
LINGO - LINDO	109
Algo más sobre LINDO	114
Palabras Reservadas	114
Variables y Comandos	115
Sintaxis del modelo	115
Archivos de comando	115
Lista de comandos	117
Listado completo de comandos:	119
Algunas consideraciones sobre LINGO	119
Sintaxis de carga de modelo	119

Planillas de cálculo Excel y Calc	121
Introducción - Uso de MS Office Excel y Apache/LibreOffice Calc	121
Excel	121
Calc	122
Solver	122
Planteo del problema.	123
Problema completo planteado en Excel y/o Calc	125
Carga del modelo en Excel	128
Carga del modelo en Calc	129
Resolver el modelo en Excel y en Calc	130
Resultados en Excel	131
Resultados en Calc	135
Resultados adicionales en Excel	135
PHP Simplex	137
Aplicaciones Android	140
Linear Optimization	141
Simplex Method	142
OR Simplex	143
Apéndice al Capítulo 4	145
Guía de instalación de Solver para planilla de cálculo	145
Versión Excel 2007:	146
Versiones Excel 2010 y posteriores:	147
Calc para OpenOffice.org y para LibreOffice	149

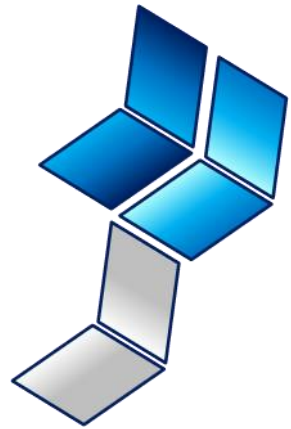
Capítulo 5. Programación Lineal Entera. El problema de transporte.

Redes simples	151
Terminología, aplicación y métodos a emplear	152
Requisitos del problema	153
Planteo general del problema	153
Problema ejemplo:	155
Método heurístico de la esquina noroeste	157
Método para la evaluación de celdas vacías.	158
Segunda etapa: reevaluación de celdas vacías	160
Tercera etapa: reevaluación de celdas vacías en la nueva tabla	161
Otros métodos heurísticos de resolución.	162
Método de multiplicadores	162
Método de Vogel	165
El problema de Best Foods resuelto con WinQSB	167
Carga de datos	167
Presentación detallada de resultados.	169

Análisis particulares	172
El problema de transporte resuelto en hoja de cálculo (Excel/Calc)	174
Procedimiento	176
Ejercicio	180
Capítulo 5 (2da. parte) Programación Lineal Entera, una aproximación a los algoritmos	183
Vista del proceso en WinQSB	190
Capítulo 6. Programación Lineal Binaria. Redes simples. Asignación	195
Terminología	196
Método Heurístico	197
Problema de maximización	200
Resolviendo programación binaria con WinQSB	203
Primer caso: líneas de producción	203
Resolviendo programación binaria con el método Simplex en hoja de cálculo	204
Ejemplo	205
Capítulo 7. Programación Lineal en redes. Problemas de flujo y de transbordo	211
Redes con nodos intermedios. (transporte con trasbordo)	212
Problemas no equilibrados	218
Costos de fabricación diferenciales	219
Transporte con capacidad limitada	221
Límites en la capacidad de transporte	222
Más posibilidades en los límites en la capacidad de transporte	225
Capítulo 8. Redes de conexión serie. El problema del viajante de comercio	229
Métodos heurísticos	232
Heurística de mejoramiento	235
Resolviendo con heurística en WinQSB	237
Referencias Bibliográficas	241



Presentación



Serie Optimiza 12.

- Libro 1** . Programación Lineal
- Libro 2** . Toma de decisiones y teoría de juegos
- Libro 3** . Inventarios y Administración de proyectos
- Libro 4** . Líneas de espera. Simulación
- Libro 5** . Diseño de experimentos
- Libro 6** . Modelos y Simulación para sistemas

*Seguramente nunca reconocido del todo.
A Carlos Von der Becke. Maestro y mentor de
la IO y la Inteligencia artificial en Argentina*

Orígenes

Todo comenzó en 1977. En la entonces flamante Universidad Nacional de Luján se modificó la carrera de *Licenciatura en Transformación de Alimentos* convirtiéndola en la actual *Ingeniería en Alimentos*, siguiendo el camino abierto por Ingeniería Agronómica, unos pocos meses antes.

El enfoque que se le dio a la nueva orientación estaba basado en Ingeniería Química, con el aporte de profesionales de las Universidades Nacionales del Litoral y del Sur¹.

Se hacía camino al andar, y, en esa búsqueda, ingresó como docente el Dr. Carlos Von der Becke, quien comenzó a hacerse cargo de varias asignaturas que, por entonces, no estaban claramente definidas.

Von der Becke comenzó por incluir temas vacantes en el plan de estudios. Fenómenos de Transporte, diseño de reactores, diseño de experimentos y una novedad en el ámbito “no — militar”: elementos básicos de investigación operativa. Simultáneamente, en otras asignaturas, como, por ejemplo, Procesos Industriales II, comenzó un proceso de transformación llevándolas de un punto en el que estaban totalmente dedicadas a rutas metabólicas de antibióticos a procesos fermentativos alimentarios.

Carlos fue un visionario de avanzada y, con los años, demostró la necesidad de que en las ingenierías argentinas se incluyera programación lineal como asignatura fundamental, cosa que hoy parece natural.

Por ese entonces, la Universidad me designó, como Ayudante de Primera, para colaborar con él, quien comenzó a realizar una serie increíble de “apuntes” impresos, a los que llamaba “fichas” y que cubrían sus materias principales: Bioingeniería y Procesos Industriales.

Con el transcurso de los años se me delegó la responsabilidad de crear “Investigación Operativa” para las carreras de Ingeniería Industrial y la de Licenciatura en Sistemas de Información, así como la transformación de algunos contenidos de “Bioingeniería” en “Ingeniería de Procesos” para la carrera de Ingeniería en Alimentos. Por ese entonces se completó un equipo docente con el Ing. Gustavo Chijani.

En Ingeniería de Procesos se incorporaron los contenidos completos de Investigación Operativa que se sumaron a los de Diseño de Experimentos, y pocos años después comenzamos el dictado de IO en las Delegaciones de Pergamino, Escobar y 9 de Julio para la carrera de Sistemas de Información, con la colaboración del Lic. Aldo Motto, quien renunció poco después y fue reemplazado por la Ing. Verónica Esaín. Ya en la década de los años 2000 se incorporó al equipo el Ing. Esteban Gidekel.

Las primeras ediciones (1980) del proyecto “*Optimiza*” fueron simples recopilaciones de “fichas” que se entregaban gratuitamente en formato “Word” y en disquetes que contenían, principalmente software (Storm y QSB+) y trabajos prácticos.

Las fichas propiamente dichas fueron incorporadas hacia el 2000 en formato digital. En 2001 apareció el primer soporte CD, que, con el nombre “*Optimiza*” se distribuyó desde 2002 a 2004.

¹ Ver: Roberti, A. “Posibilidades de un cambio de paradigma en el diseño curricular aplicado a la Universidad Nacional de Luján”. Observatorio Universitario, Departamento de Ciencias Sociales, 2017.

Con la denominación “**Optimiza2005**” lanzamos la siguiente versión que incluía ayudas de navegación gráfica y que se distribuyó en 2005 y 2006.

Luego aparecieron “**Optimiza8**” y “**Optimiza9**”, siendo ésta la última versión en soporte CD, ya que la entrega a los estudiantes del Centro Regional Chivilcoy motivó una queja por lo costoso del soporte (a los estudiantes se les pedía un CD virgen para grabar lo que se les entregaba gratuitamente).

La versión más completa, “**Optimiza10**”, solo se distribuyó en formato digital (PDF y e-Book) y durante 9 años, hasta el 2018. En el 2019 se lanzó oficialmente “**Optimiza12**” versión digital en seis libros divididos en temas y que cubren las diferentes asignaturas:

- “**Investigación Operativa**” (Ing. Industrial) se destinan los Libros 1, 2, 3 y 4.
- “**Ingeniería de Procesos**” (Ing. en Alimentos) los Libros 1, 2, 3, 4 y 5.
- “**Modelos, Simulación y Teoría de la Decisión**” (Licenciatura en Sistemas), el Libro 6.

La versión impresa que presentamos acá corresponde a **Optimiza12** y pretende cubrir con el formato tradicional impreso todas las posibilidades que hemos presentado a lo largo de los años, desde 1988.

Optimiza

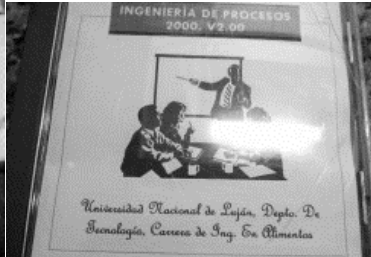
Ya desde 1988 con Chijani nos dimos cuenta de que el sendero marcado por Von der Becke era el correcto: la mejor manera de enseñar Investigación Operativa y Diseño de Experimentos era enfocar las actividades de aprendizaje al uso de herramientas de cómputo, que, en ese momento, si bien eran maravillosas, aun eran extremadamente simples (y caras).

Es así como el proyecto de soporte digital fue iniciado para aportar software, que entonces no estaba mayoritariamente disponible (¡No existía la internet como la conocemos hoy!). Luego la idea fue digitalizar las fichas, como una manera de acompañar las herramientas que ofrecíamos. Finalmente lo formalizamos como libro de texto, pero siempre apuntando al uso de software, cosa que no es fácil de encontrar en otros textos de la disciplina.

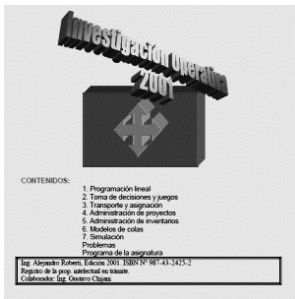
Todo esto, desde 2000, fue respaldado con la existencia de un sitio web y una plataforma propia en las que, el estudiante, dispone de todo el material, ya sea “*on-line*” como para descargar.

Desde 1988 han pasado más de 40 generaciones de estudiantes en tres carreras de la Universidad que recibieron nuestros modestos aportes y textos. Más de dos mil estudiantes, a quienes con fervor y dedicación les dedicamos este texto.

Ing. Alejandro Roberti
Puerto Madryn, mayo de 2019



Primeras versiones: diskette (izq.) con software bajo D.O.S y CD (der.) con apuntes

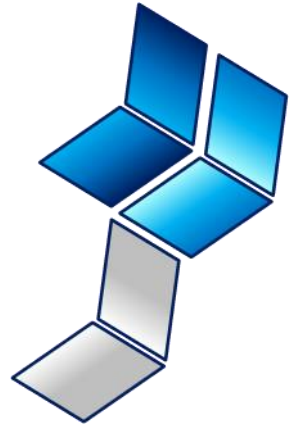


Libro Digital. Versiones en CD 2001, 2005 y 2010



Captura de la pantalla de navegación de Optimiza 2009





Capítulo 1. Introducción

Investigación operativa

Si bien desde hace muchos años hay aplicaciones, estudios y avances en disciplinas tales como la toma de decisiones, la optimización de métodos y procesos, el gerenciamiento de proyectos complejos y los procedimientos de administración e ingeniería de producción, al conjunto de técnicas que hoy llamamos “**Investigación Operativa**” se comenzaron a estudiar en forma integrada un poco antes de la Segunda Guerra Mundial, en ámbitos como los Laboratorios dependientes de la empresa telefónica *Bell* y en la Cadena de Radiodifusión (*Broadcasting*) *Columbia (CBS)* de Estados Unidos, entre otros.

Alexander Graham Bell (1847-1922), fue un inventor de origen inglés, debe su fama al desarrollo comercial del teléfono y a sus estudios para limitar los efectos de la sordera. Implementó, como es sabido, el concepto social y comercial de telefonía a partir de

investigaciones sobre el telégrafo y el sonido, creando – en 1877 – la Compañía *Bell*, posteriormente fundó dos revistas: *National Geographic Society* y *Science*, participando también en inventos tales como el tren de aterrizaje triciclo de los aviones, el alerón y el aliscafo.



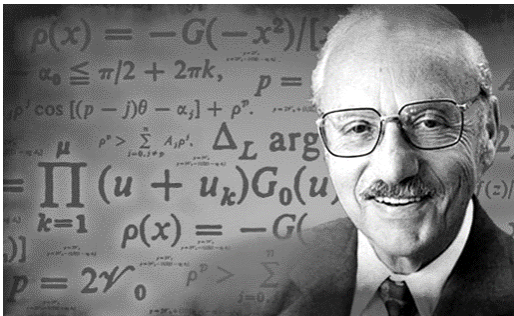
Es significativo el aporte que a la Investigación Operativa brindó un grupo de investigación de la empresa Bell que en la década de los 1930 abordó el estudio sistemático de redes complejas, similar al que encaró la CBS aunque esos trabajos no prosperaron hasta después de terminada la Segunda Guerra Mundial.

Es por ello por lo que la Investigación Operativa o de Operaciones se desarrolla a partir de 1940 en el ámbito militar, cuando cobra forma en la dimensión actual. Tanto la Real Fuerza Aérea Británica (RAF), como el Almirantazgo de ese reino, crean equipos de Investigación de Operaciones para hacer frente a los ataques submarinos a los buques que constituían las líneas de suministro que abastecían al territorio insular como a los ataques masivos aéreos y las altas probabilidades de invasión alemana a Inglaterra. Lo cierto es que la eficiencia en la defensa antisubmarina aumenta con estas técnicas, así como una buena sincronización y optimización adecuada en la defensa aérea del territorio y de los ataques navales de protección de convoyes de suministro. Se enfocó el problema como un sistema en el que se era insumo la opinión de varios especialistas de diversas disciplinas, no solo de las militares. Entonces se introdujeron tres enfoques fundamentales del trabajo: el sistémico, el multidisciplinar y el de modelado matemático. En esos equipos de varios expertos participaron, además, observadores del Ejército de Estados Unidos, que posteriormente siguieron desarrollando métodos que se emplearon en operaciones varias, como misiones de bombardeo, el desembarco en Normandía, los ataques atómicos a Japón y los bombardeos a la llamada “senda de Ho Chi Min” en una fase media y tardía de la guerra de Vietnam.

Después de la segunda guerra mundial, en el ámbito civil, tanto *Bell Laboratories* como *CBS* avanzaron en sus trabajos interrumpidos por ella. Particularmente en el diseño de telefonía por relevadores (lo que hoy conocemos como enlace de microondas) y optimización de redes de radio – televisión, respectivamente. Más adelante la Armada y la Fuerza Aérea de Estados Unidos emplearon técnicas entonces novedosas en

proyectos militares y la firma de productos químicos Dupont en proyectos de implementación de nuevas tecnologías petroquímicas.

George Datzing², académico del Instituto Tecnológico de Massachussets, presentó a fines de los años 40 el algoritmo Simplex. La Fuerza Aérea de Estados Unidos publicó en los años 60 la utilización, en operaciones tácticas, de ese método para optimizar en la guerra de Vietnam las misiones de bombardeo sobre la senda de Ho-Chi-Minh, conjunto de caminos de vinculación entre las dos partes en litigio, (llamadas entonces Vietnam del Norte y Vietnam del Sur) que eran utilizados tanto por el ejército de Vietnam del Norte, como por la guerrilla llamada Vietcong para fines militares contra el sur.



Posteriormente, las Escuelas Superiores de Guerra de diversos países, adoptaron la investigación de operaciones militares aplicando el método Simplex–Dantzig en sus cursos regulares y el análisis de sistemas de armas. Entre esas escuelas figuraba la del Ejército de la República Argentina, uno de cuyos profesores, el **Dr. Carlos von der Becke**, comienza,

posteriormente, a aplicar la disciplina en el ámbito de la ingeniería en la Universidad Nacional de Luján.

En esta publicación se recopilan varias técnicas que, en conjunto, constituyen lo que se denomina “**Investigación Operativa**” y que, en su origen, fueron empleadas por los militares, los economistas y los administradores. Posteriormente su uso se extendió a las ramas de la ingeniería y que se aplican para analizar diversas situaciones, por ejemplo:

- a) **Procesos de asignación de recursos.** Caracterizados por el limitante de recursos disponibles, (materias primas, inversión, horas-máquina, horas-hombre), y la asignación de estos recursos limitados de manera más eficiente con el costo mínimo, el mínimo tiempo de utilización, la mínima cantidad de desperdicios, el trabajo más eficiente, etc.

² Ver, al final del Capítulo, las Noticias Históricas sobre George Datzing, sobre la Segunda Guerra Mundial y sobre la guerra de Vietnam.

b) **Procesos de sustitución o reemplazo**, que pueden realizarse de manera preventiva o correctiva, ya sea por vejez, desgaste, o por muerte súbita.

c) **Procesos de Inventarios**. La meta es resolver problemas de almacenes, relacionados con: ¿cuánto del inventario de reposición ha de ordenarse en cada ocasión?, y ¿cuándo debe ordenarse dicha cantidad?, con el objetivo de minimizar el costo total. Se buscan modelos eficaces que permitan el equilibrio entre los beneficios y los costos de almacén, deterioro, devaluación u obsolescencia de los inventarios. Se determinan los costos de mantenimiento de esos inventarios, los de ordenar, los de faltantes, los de llevar inventario y los de oportunidad.

d) **Procesos de líneas de espera, o Teoría de Colas**. Su característica es analizar el comportamiento de las esperas que se dan al ofrecer un servicio a cierta población de clientes. Observando tanto la distribución de probabilidad con la que ellos llegan en demanda de ese servicio, como la del tiempo de prestación de ese servicio. Se obtienen modelos de comportamiento del sistema analizado.

e) **Procesos competitivos**. Se utiliza la **Teoría de Juegos**, caracterizándose por la existencia de al menos dos competidores con varias estrategias a seleccionar. El fin es determinar la selección del siguiente movimiento en base a probabilidades que tienen en cuenta las primeras selecciones de los competidores.

Aplicaciones de la Teoría de Juegos:

- Determinar las necesidades de mano de obra, previendo renunciadas, accidentes, retiros, defunciones.
- Poder conocer el monto de las cuentas por pagar o de difícil cobro.
- Conocer de manera confiable la lealtad de los clientes de la empresa frente a la aparición de otra marca u otro producto.
- Medir la efectividad de las campañas publicitarias en comparación con las anteriores llevadas a cabo.
- Diseñar estrategias comerciales para competir por mercados.

f) **Procesos combinados**. Hacen uso de más de una de las herramientas de la Investigación Operativa para llegar a la solución integral del mismo. Puede presentarse el caso de algún problema de Control de la Producción, hará uso de la Teoría de Inventarios, con Líneas de espera. Lo usual debiera ser resolver uno a uno, siguiendo secuencias lógicas, y combinar solo donde haya interrelaciones para obtener una solución óptima.

g) **Simulación.** Es el uso de herramientas informáticas y matemáticas para la resolución de problemas aplicando uno o más procesos de IO, para obtener conclusiones con indicadores estadísticos de su validez. Se utiliza para:

- Integración de los esfuerzos de mercadeo, combinación de productos, distribución, sincronización de esfuerzos, simular mercados
- Analizar los lugares óptimos donde deban situarse los almacenes que permita minimizar los costos de distribución.
- Evaluación de las alternativas de inversión más rentables de la empresa.
- Simular reglas de decisión de operaciones de fabricación, que lleven a la programación y el control efectivo de la producción.
- Selección del plan óptimo de opciones de distribución del presupuesto.
- Diseño de productos o de procesos de fabricación nuevos.

En términos generales, la Investigación Operativa es una herramienta múltiple que se utiliza en variedad de situaciones. Por ejemplo:

- una empresa con distintas líneas de producción y posibilidad de obtener diversos productos finales que busca maximizar sus ganancias o minimizar sus costos. Inversión de capital en distintas posibilidades o fondos, de manera tal que el riesgo y la ganancia conjunta sea aceptable.
- Programas de inversión en mantenimiento preventivo que buscan bajar los costos operativos.
- Operaciones complejas como la construcción de una represa.
- Formulación de productos optimizando las disponibilidades de materias primas, etc.

La naturaleza brinda la información necesaria para resolver estos problemas. Si dicha información se conoce con certeza, entonces el problema a resolver es **determinístico**, el caso contrario que es cuando la información no se conoce o no se conoce con certeza, es **estocástico**. En el desarrollo del curso se formulan propuestas para resolver ambos tipos de problemas.

Sistemas, Modelos y Problemas

Sistema

Un sistema (del latín *systema*, proveniente del griego *σύστημα*) es un conjunto de funciones, virtualmente referenciadas sobre ejes, bien sean estos reales o abstractos.

También suele definirse como un conjunto de elementos (u objetos) dinámicamente relacionados formando una actividad para alcanzar un objetivo operando sobre datos, energía y/o materia para proveer información.

Un objeto es aquello que puede ser observado, estudiado y aprehendido (o, en filosofía, “sentido por el observador, incluso él mismo”), en contraposición a la representación abstracta de ese objeto que se crea en la mente a través del proceso de generalización

Los objetos presentan:

Identidad o propiedad que permite diferenciarlos entre ellos.

Comportamiento relacionado con su funcionalidad. Determina lo que puede realizar o lo que puede responder ante estímulos enviados por otros objetos

Estado o conjunto de los valores de sus atributos en un instante de tiempo dado.

Cada objeto relacionado se denomina **Componente**.

Se denomina **límites** a la definición del conjunto de componentes e interrelaciones.

Por ejemplo, puede definirse el sistema brazo-reloj pues hay relaciones entre los dos objetos. Sin embargo puede haber relaciones con más objetos (los ojos del usuario que quiere consultar la hora, la tetera de porcelana si al consultar la hora corre el riesgo de ser golpeada, el mueble donde se apoya la tetera, el piso de madera del lugar, el planeta tierra y el efecto que sobre su órbita puede causar el impacto de la tetera en el piso) Es evidente que el límite puede colocarse en cualquier punto, y se lo hace en función de analizar solamente aquellas relaciones (o interrelaciones) que interesan o que son significativas. En el ejemplo, es despreciable el efecto de consultar la hora sobre la estabilidad de la órbita terrestre.

Obviamente, al colocarle al sistema límites arbitrarios aparecen las relaciones íter y extra sistémicas, que son aquellas que se manifiestan entre los objetos pertenecientes al sistema y entre éste y el entorno, respectivamente.

Desde esta óptica, pueden describirse dos tipos de sistemas:

- los **Sistemas abiertos** que son aquellos con intercambios activos (materia, energía, información) con el entorno: si llega un estímulo del entorno se produce la señal de salida correspondiente (respuesta)
- los **Sistemas cerrados** que son aquellos en que las señales de estímulo y de respuesta entre el sistema y el entorno no existen o han sido suprimidas del análisis. Pueden compartir energía con el medio, pero no materia. Los sistemas aislados son aquellos que no pueden compartir ni materia, ni energía con el medio.

Lo que siempre se encuentra en un sistema, o, dicho de otra manera, los elementos constitutivos de los sistemas son los siguientes:

Propósito u objetivo. Los elementos (u objetos) y las relaciones, definen una distribución que trata siempre de alcanzar un objetivo.

Globalismo o totalidad: un cambio en un objeto puede producir cambios en los otros. El efecto final es un ajuste a todo el sistema. Es una relación Causa/Efecto que deriva en dos fenómenos:

- **Entropía:** tendencia de los sistemas a desgastarse, a desintegrarse, relajar los estándares y aumentar la aleatoriedad. La entropía aumenta con el tiempo. Si aumenta la información, disminuye la entropía, porque es la base de la configuración y del orden.
- **Homeostasia:** equilibrio dinámico entre las partes del sistema. Los sistemas tienen una tendencia a adaptarse con el fin de alcanzar un equilibrio interno frente a los cambios externos del entorno.

La teoría general de sistemas (TGS)³, por otra parte, establece 3 premisas

1. *Los sistemas existen dentro de sistemas:* cada sistema existe dentro de otro más grande llamado suprasistema.
2. *Los sistemas son abiertos* (en contraposición a lo visto más arriba – ver nota al pie número 2 —): cada sistema que se examina recibe y descarga algo en los otros sistemas, generalmente los contiguos. Los sistemas abiertos se caracterizan por un proceso de cambio infinito con su entorno, que son los otros sistemas. Cuando el intercambio cesa, el sistema se desintegra, esto es, pierde sus fuentes de energía.
3. Las funciones de un sistema dependen de su *estructura*: para los sistemas biológicos y mecánicos esta afirmación es intuitiva. Los tejidos musculares, por ejemplo, se contraen porque están constituidos por una estructura celular que permite contracciones.

En contraposición a la TGS se puede mencionar la visión mecanicista, impulsada, fundamentalmente por Descartes (1596 – 1650), cuya ontología (llamada ontología Cartesiana) propone que el mundo y lo que en él existe se comporta como una máquina en cuanto a las relaciones rígidas causa-efecto, y en que lo real es físico. Esta visión –

³ Para un análisis más detallado de este tipo de sistemas abstractos debe consultarse el capítulo de Simulación, particularmente la teoría general de sistemas, que fue enunciada por Ludwin von Bertalaffy (entre 1945 y 1968) con el objeto de unir el metabolismo, crecimiento, morfogénesis y fisiología en una sola teoría dinámica aplicada a sistemas estáticos abiertos.

de enormes éxitos a partir de las investigaciones de, entre otros, Newton – propone sistemas cerrados y estáticos con métodos cuantitativos y explicaciones matemáticas.

Los parámetros que caracterizan cada uno de los sistemas, son

Entrada o insumo o impulso (*input*).

Salida o producto o resultado (*output*)

Procesamiento o procesador o transformador (*throughput*) (generalmente es una caja negra)

Retroacción o retroalimentación o retroinformación (*feedback*)

Ambiente: (puede ser un recurso para el sistema, también puede ser una amenaza).

Modelos

Mediante la utilización de modelos es posible representar un sistema, resaltando los elementos componentes y las relaciones entre ellos, pero limitando la representación solo a aquellos componentes o relaciones que interesan al observador o que éste considera relevantes.

Hay que tener en cuenta que un modelo es un sistema en sí mismo, y que generalmente se caracteriza por poseer menos interrelaciones y elementos que el sistema que representa. Existen varios tipos de modelos:

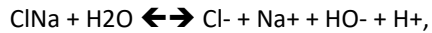
El plano, o *lay out*, de una planta es un **Modelo icónico**⁴.

Los **modelos analógicos** son aquellos que explican las relaciones usando comparaciones con objetos o fenómenos conocidos y comparables: el modelo de la resistencia eléctrica de Ohm se utiliza para los fenómenos de transporte de energía térmica, los economistas hablan de flujo de dinero, en analogía con un modelo hidráulico: taponamiento, drenaje de capitales, suba de nivel de tasas, etc.

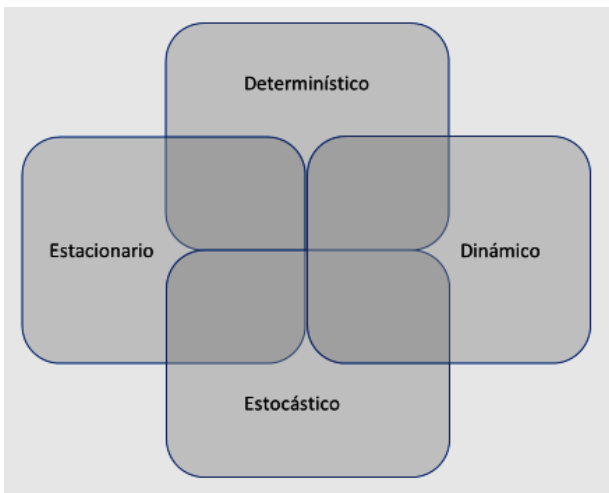
Los **modelos matemáticos**, son capaces de presentar mediante números abstractos diversos fenómenos o comportamientos. Por ejemplo. todo lo ocurrido durante un mes en la cuenta de la caja de ahorro (por otra parte, la terminología “caja de ahorro” es un modelo analógico en sí misma).

⁴ La palabra “ícono” proviene del griego y significa imagen o representación (εἰκών, eikon, "imagen") Por ejemplo, algunas religiones utilizan íconos para representar ideas abstractas. Los sistemas operativos los utilizan para representar comandos o tipos de contenidos.

Los **modelos simbólicos** representan ciertas relaciones sistémicas mediante símbolos, como el que utilizan los químicos, que a un fenómeno tan complejo como la reacción de ionización de la sal gema en agua lo representan con



Este mismo texto es una colección de símbolos (letras) cada una de las cuales representa un sonido y que es diferente según la cultura. Un fonema chino, por ejemplo, puede parecer un dibujo para un occidental que usa caracteres latinos y viceversa



Los **modelos deterministas** son aquellos en los cuales los componentes están relacionados entre sí por funciones conocidas y perfectamente predecibles.

Los **modelos estacionarios** son los que describen sistemas independientemente de los fenómenos que ocurren cuando se establecen o se modifican las relaciones

entre sus componentes. Por ejemplo, el modelo de sistema solar describe a la tierra y los demás planetas girando alrededor del sol, sin tener en cuenta el resto del universo ni lo que ocurrió en el estadio inicial ni cómo será en el futuro.

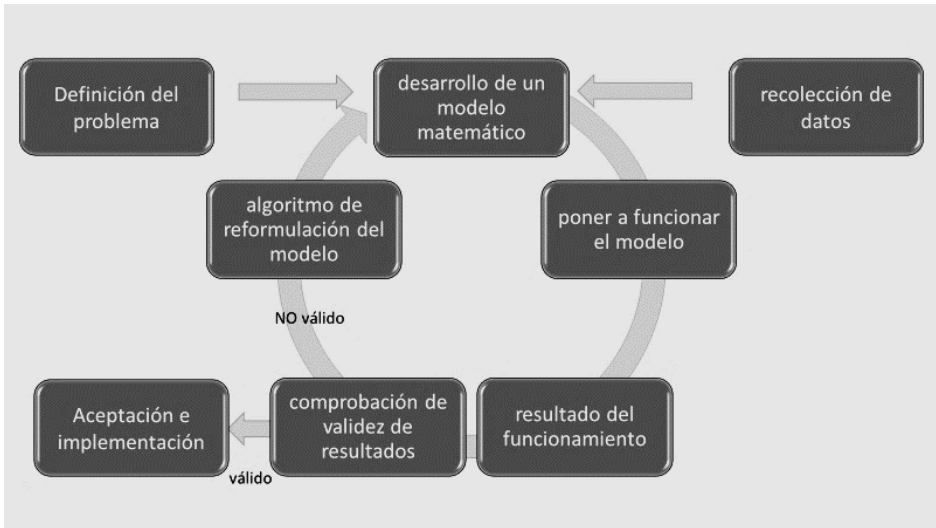
Por último, se mencionan los **modelos dinámicos**, que son aquellos cuyo propio comportamiento se modifica a medida que es utilizado como representación, ya que recibe y emite información desde y al sistema que representa a fin de adaptarse a la realidad. Este tipo de modelos, generalmente, se va resolviendo secuencialmente.

El uso de modelos simbólicos y matemáticos es el más difundido, pues se construyen con elementos accesibles y simples de adaptar.

En cualquier caso, el modelo será una simplificación y, por lo tanto, contendrá solamente algunas variables y jamás todas (si las tuviera sería la realidad y no un

modelo). Decidir que variables se usan y cuales se descartan implica el uso de hipótesis y de un modelo de control.

Pasos para formular un modelo:



Los pasos básicos para formular correctamente un modelo matemático o computacional son:

Estudiar el problema, identificar las variables de control y las no controlables. Identificar los parámetros. Evitar los prejuicios.

Tratar de expresar el problema matemáticamente. (Símbolos)

Definir el campo de aplicación y tratar de aislarlo de las interacciones.

Verificar si el problema tiene una solución y si el modelo puede usarse en otros problemas.

Probar la solución: verificar el grado de descripción de la realidad.

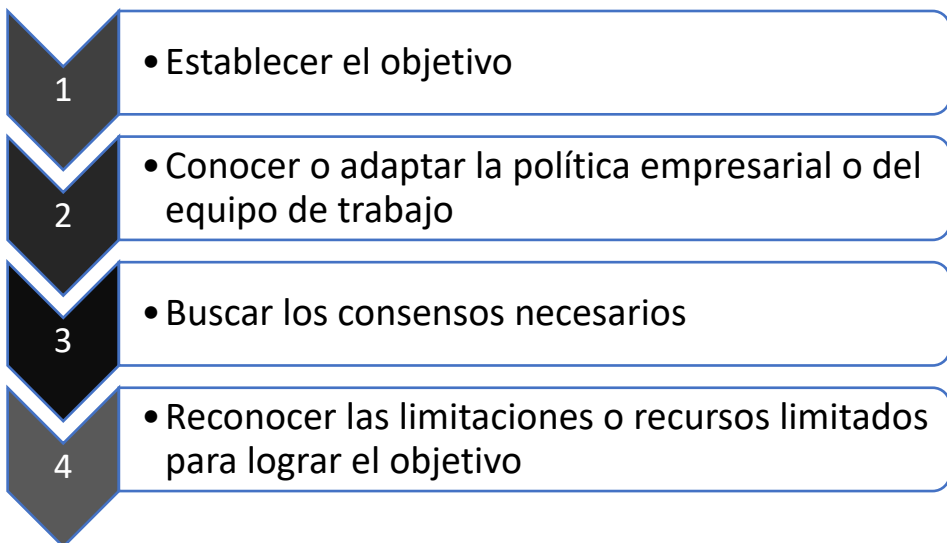
Ajustar el modelo y volver a empezar.

Definición del Problema

Consiste en la identificación y la capacidad de describir con precisión el problema enfrentado. Implica conocer el objetivo global, las limitaciones fundamentales y las limitaciones que es conveniente introducir. Muchas veces no se tiene conocimiento de estos elementos, lo cual requiere de un profundo análisis y – generalmente – negociaciones con los miembros del equipo de trabajo.

La **definición del objetivo** puede ser un punto de conflicto. En un mismo caso, se da la posibilidad de encontrar más de un objetivo deseable y que éstos, por añadidura, sean antagónicos. Es difícil elegir uno sobre otro: el objetivo de minimizar los costos de producción suele ser antagónico con el objetivo de maximizar la calidad del producto terminado. ¿Cuál es el objetivo global? Si hay una decisión política o empresarial sobre los costos de producción, entonces habrá que establecer una restricción de nivel de calidad. Y en todo caso ¿cuáles serán las unidades de medida?

Como una guía aceptable, aunque muy general, el proceso de definición del problema consiste en:



Desarrollo de un modelo matemático y recolección de datos.

Con el objetivo de introducirnos en forma sencilla en la metodología para formular un modelo, tal como fue planteada precedentemente, analizaremos un caso muy simple:

Una empresa que produce refrescos tiene la posibilidad de adquirir jarabe de maíz de dos fabricantes diferentes. El Departamento de beneficios desea determinar, del total presupuestado para ese rubro en el próximo semestre, que fracción debe destinarse a cada alternativa.

Los antecedentes de producción y ventas muestran que cada uno de los productos tiene diferentes rendimientos en función del costo, pero que ambos fabricantes suelen no cumplir cuidadosamente con los contratos si saben que son proveedores exclusivos, por lo tanto, la decisión es contratarlos a ambos.

El rendimiento en función del costo del proveedor **Action** es del 10% y el del **Baradero Maiz** (BaMa) es del 6%. Debido a la necesidad de asegurar la producción propia, se determina que a ninguna de las alternativas se le va a confiar más del 75% de la compra total y que la cantidad a adquirir a **Action** no debe exceder del doble que lo que se adquirirá a **BaMa**.

Se pide calcular

¿Cuántas posibilidades de contrato hay?

¿Cuál sería el modelo que permite tomar decisiones?

¿Cuál sería la mejor combinación de compra?

Variables de decisión y función objetivo

Para llevar este problema a una forma de modelo matemático se debe comenzar por definir que es aquello sobre lo cual se puede decidir. En la terminología de la Investigación Operativa se trata de:

IDENTIFICAR LAS VARIABLES DE DECISIÓN:

En este caso, las variables de decisión serán dos y a cada una de ellas se les asigna, un símbolo arbitrario y – cuando corresponde – las unidades correspondientes. En este caso, los símbolos a usar serán A y B , siendo:

A = fracción del presupuesto destinado a comprar **Action**,

B = fracción del presupuesto destinado a comprar **BaMa**

Las condiciones del caso obligan a encontrar valores para A y para B que ofrezcan un rendimiento máximo y que, simultáneamente, cumplan con todos los requisitos planteados. En la terminología de la IO: esos valores son buscados para cumplir el objetivo: maximizar el rendimiento esperado satisfaciendo las restricciones impuestas.

¿Cómo puede plantearse el problema en forma de modelo?

Se espera que cada peso destinado a *Action* tenga un rendimiento de 10 centavos (ya que los rendimientos están especificados en función del costo) y de 6 centavos en *BaMa*. Si A es la fracción a invertir en *Action*, entonces la retribución anual será $0,10A$. Por ello la expresión matemática que demuestra el objetivo de este modelo deberá tener en cuenta la contribución de cada una de las posibilidades: $0,10 A$ y $0,06 B$. Con estos elementos se podrá expresar el objetivo global, que, para la IO, será la **FUNCIÓN OBJETIVO**. Esta función se puede expresar así

$$\text{Maximizar } 0,10A + 0,06B$$

Como se puede ver, la función consta de dos partes:

- a) la intención (maximizar) que se denomina **criterio**
- b) la función operativa – que se denomina **función objetivo** – que tiene coeficientes asociados a variables de decisión, lo cual muestra la manera o política empleada para lograr el objetivo y satisfacer el criterio.

Restricciones

Pero esto solo no alcanza para definir el problema como un modelo matemático: existen las limitaciones o restricciones, las cuales deben ser escritas utilizando las mismas variables de decisión en forma coherente y exhaustiva:

- a) **Primera restricción:** Ningún proveedor puede superar el 75% de lo adquirido, la cual se lleva al modelo así:

$$A \leq 0,75$$

$$B \leq 0,75$$

ambas desigualdades representan los límites superiores de compra en *Action* y *BaMa*, respectivamente.

- b) **Segunda restricción:** la inversión en *Action* no debe superar el doble de la inversión en *BaMa*, lo que se representa así:

$$A \leq 2B$$

o también

$$A - 2B \leq 0$$

- c) **Tercera restricción:** La fracción de dinero a destinar a cada proveedor debe ser coherente. Olvidarse de esta restricción podría ser un error muy fácil de cometer, pero al resolver el modelo podría dar como resultado – por ejemplo – comprar el 75% a A y el 75% a B , lo cual es incoherente. Entonces:

$$A + B = 1$$

d) **Restricciones lógicas:** no puede haber compras negativas, lo que representa el límite inferior de compra en cada alternativa (cero es no comprar)

$$\begin{aligned}A &\geq 0 \\ B &\geq 0\end{aligned}$$

El modelo, ahora completo, se escribe uniendo todas estas partes:

$$0,1A + 0,06B$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}A &\leq 0,75 \\ B &\leq 0,75 \\ A - 2B &\leq 0 \\ A + B &= 1 \\ A &\geq 0 \\ B &\geq 0\end{aligned}$$

En este caso existen: una **función objetivo y restricciones** escritas en función de **variables de decisión** (cuánto se habrá de destinar a cada una) y de otras informaciones conocidas (**datos**): cuánto rinden cada uno de los productos y cuánto como máximo y como mínimo se permite destinar a cada uno de ellos: estas son **variables y/o parámetros sin control**.

En la práctica es difícil encontrar un problema como éste. Generalmente hay que estimar los datos. Y el modelo va a ser tan bueno como la estimación de los datos, nunca mejor.

Resolución del modelo matemático.

En este caso, resolver el modelo es hallar los valores para A y para B que hagan máxima la expresión de la función objetivo y que, en forma simultánea, cumplan con todas y con cada una de las restricciones. Para resolver estos modelos, es decir encontrar valores satisfactorios para las variables de decisión, hay dos tipos de técnicas:

Optimización: se encuentran los mejores valores para las variables, que hagan máximo el objetivo y satisfagan simultáneamente todas las limitaciones-

Heurísticas: Producen valores aceptables para la función objetivo y satisfacen las restricciones.

Una solución posible para este problema, (se verá más adelante cómo se encuentra) es aquella en que los valores de las variables cumplen con el criterio y satisfacen todas y cada una de las restricciones:

$$\begin{aligned}A &= 0,6667 \\ B &= 0,3333\end{aligned}$$

Significado: por cada unidad presupuestada habrá un rendimiento de $0,6667 \times 0,10 + 0,3333 \times 0,06 = 0,08667$

Comprobación de la validez de la solución hallada.

Puede ocurrir que el modelo haya sido imperfectamente planteado, que no hayan sido previstas todas las restricciones, o que se omitiera o simplificara algún parámetro importante, que los datos estuvieran mal estimados o mal cargados. En todos los casos es conveniente comprobar si la solución hallada es válida. Para ello existen varios métodos, aunque a veces basta con un análisis preliminar simple.

Si el modelo no funciona hay que revisarlo, incluir nuevas restricciones, eliminar restricciones o replantear con más exactitud las limitaciones reales. A veces es necesario usar la experiencia para adaptar las soluciones dadas por el modelo. Otras veces, aun estando todo bien y con resultados válidos, las soluciones son impracticables. Es difícil, por ejemplo, incluir en un modelo datos que tienen que ver con conductas. Otra fuente de disturbios son los datos que cambian con el transcurso del tiempo: la calidad de los productos puede variar en el futuro, no dejando de ser válido el dato anterior.

Usos de los modelos

Los modelos ayudan a tomar dos tipos de decisiones:

Estratégicas: son decisiones de única vez, afectan intervalos de tiempo largos.

Son del tipo:

¿Se debe abrir una nueva línea de producción?

¿Debería hacer inventarios en período regular o solo cuando caigan los niveles?

Este tipo de decisiones implican impactos grandes, por lo cual se justifica invertir esfuerzo y tiempo en sus modelos y resoluciones.

Operacionales: afectan procesos en curso y períodos más cortos de tiempo.

Son del tipo:

¿Cómo reprogramar el trabajo de la semana cada semana?

Sobre los tres productos de la fábrica, en estas condiciones de mercado y con estos recursos de materias primas, ¿cuál es la producción para realizar este mes?

Estos modelos se usan repetidamente, por lo cual también se justifica invertir en ellos.

Las **ventajas** de los modelos, en general, son:

1. Lograr objetivos con recursos escasos
2. Evaluar el impacto y costo de un cambio sin necesidad de gastar en producirlo previamente.
3. Se puede evaluar la fortaleza de los resultados propuestos mediante el análisis de sensibilidad: *¿qué sucedería si...?*. Por ejemplo ¿qué pasaría si el rendimiento de *Action* fuera el 8% en vez del 10%?

Técnicas para construir modelos matemáticos

Veremos los pasos a seguir y algunas técnicas a emplear para formular modelos determinísticos. No se pretende mostrar un método único. Simplemente es una propuesta metodológica básica.

El siguiente es un caso simple, que también se utiliza en temas posteriores para que se pueda profundizar el conocimiento de sus detalles y permitir la correcta interpretación de los resultados a medida que se avanza en el curso:

Planeamiento de la producción en Alcoholes Argentinos (AA).

Un empresario adquiere una pequeña planta alcoholera (*Alcoholera Argenta - AA*) ubicada en San Nicolás y que desde hace un tiempo produce dos alcoholes, "*Guaraní*" (Catálogo AA01) y "*Pampa*" (Catálogo AA02). La primera medida que toma la nueva gestión es planificar correctamente la producción semanal con el objetivo de obtener máximas ganancias. Para ello se designa a una persona que debe establecer un cuadro de situación de partida y hacer una recomendación que cumpla con los requisitos.

La situación inicial es:

- **Disponibilidad operativa de la planta:** La planta tiene dos sectores destinados a la elaboración de alcohol. El primero es el de **producción**, que elabora cualquiera de los alcoholes de catálogo. El producido pasa al segundo sector, **rectificado**, donde se termina el procedimiento.
- El **sector de producción** opera 40 horas semanales empleando a cinco trabajadores de tiempo completo y a dos que trabajan quince horas semanales.
- Una vez terminado el producto, éste pasa al **sector de rectificado**, que tiene equipos operados por seis empleados de tiempo completo y uno de 10 horas semanales.

- AA no tiene problemas de materias primas para ambos productos. Puede vender todo lo que quiera de “Guarani” pero tiene una demanda limitada a 120.000 litros semanales de “Pampa”.
- “Guarani” deja una ganancia neta de 3 \$ por mil litros y “Pampa” de 5 \$/1.000 litros?

La propuesta es formular el problema en forma de modelo matemático siguiendo las cuatro etapas a fin de tratar de obtener una metodología apta para aplicar a cualquier modelo:

Primera etapa: Identificación de las variables de decisión

Tanto el personal de producción como el de rectificación deben saber al principio de la semana cual es el plan de producción, por tanto, hay que informarles lo que deben producir, en otras palabras, especificar el número de kilolitros/semana a producir de “GUARANÍ” y de “PAMPA”. Esas son las variables de decisión.

En primer lugar, se le dará un nombre simbólico a las variables de decisión, que sea fácil de identificar, por ejemplo, P por Producción o PG por Producción Guaraní, o, simplemente, como en este caso, X_1 y X_2 para señalar producción a determinar del producto 1 y 2, respectivamente. Así sería:

X_1 : producción en kilolitros semanales de “GUARANÍ”

X_2 : producción en kilolitros semanales de “PAMPA”.

Estas variables deben ser definidas con precisión, sin ambigüedades: X_1 será la producción semanal de “GUARANÍ” expresada en mil litros/semana [kl/sem] y no en otra unidad.

Para identificar las variables de decisión debemos poder identificar:

- los elementos que afectan los costos, las ganancias o lo que represente el objetivo global del problema.
- los elementos que se pueden elegir y/o controlar con libertad.
- las decisiones por tomar
- la información que deberá disponer quien quiere llevar adelante la solución propuesta cuando se resuelva el modelo.

Segunda etapa: Identificación de datos del problema

Para determinar las cantidades reales a producir a efectos de maximizar las ganancias se necesita saber:

- Número de horas-hombre de trabajo disponibles en el sector de elaboración, o capacidad de producción semanal en ese sector.
- Número de horas-hombre disponibles en el sector de rectificación, o capacidad de producción semanal en ese sector.
- Ganancias por la venta de cada uno de los productos.

Como se trata de un problema determinístico, es necesario obtener estos datos o acceder a ellos en el momento de formular el problema. Supongamos que se obtienen los siguientes datos de la planta:

Sector Producción	
5 empleados x 40 h/semana	200 h/hombre semana
2 empleados x 15 h/semana	30 h/hombre semana
Total en Sector Producción	230 h/hombre semana
Sector Rectificado	
6 empleados x 40 h/semana	240 h/hombre semana
1 empleado x 10 h/semana	10 h/hombre semana
Total en sector Rectificado	250 h/hombre semana

los márgenes de ganancias son de 3 \$/kl para “GUARANÍ” y de 5 \$/kl para “PAMPA”.

Como podemos ver, la diferencia entre las variables y los datos es que el operador no puede controlar los valores de los datos. No se podría cambiar la capacidad de trabajo de un hombre o de una máquina, pero sí se podría afectar a más o menos hombres o máquinas. Debemos tener en cuenta este detalle, volveremos sobre él. También ocurre que, cuando se avanza en el planteo del problema, puede ser necesario ampliar datos, obtener valores más completos u otros que no parecieran ser necesarios al principio e, incluso, descartar información que no es pertinente.

Tercera etapa: Formulación de la función objetivo.

Esta etapa se refiere al planteo del problema en forma matemática. Así como para determinar las variables de decisión nos preguntábamos “¿qué hay que informar al jefe de producción?”, para formular la función objetivo deberemos plantearnos “¿qué se espera obtener con este modelo?” Es la información que se dará a la gerencia y se relaciona con el objetivo global. Debemos notar que esto nos lleva a la posibilidad de dos niveles de reporte: el primero dirigido al nivel operativo de la planta (por ejemplo,

el jefe de producción): *cuánto se fabricará* (plan de producción); el otro destinado al nivel superior: *cuánto se va a ganar con el plan de producción propuesto*.

Para formular el objetivo generalmente se puede usar el siguiente método:

Establecer el objetivo en forma verbal, que en este caso es:

Maximizar la ganancia semanal del total de la producción de “GUARANÍ” y de “PAMPA”, determinando las cantidades a producir de cada uno de los alcoholes (plan de producción).

Si es posible, **descomponer el objetivo en operaciones aritméticas básicas** (suma, resta o producto) de cantidades individuales:

Maximizar =

$$\begin{aligned}
 &= (\text{Ganancia por producir una unidad de "GUARANÍ"}) \times \\
 &\quad \times (\text{cantidad de unidades a producir de "GUARANÍ"}) + \\
 &\quad + (\text{Ganancia por producir una unidad de "PAMPA"}) \times \\
 &\quad \times (\text{cantidad de unidades a producir de "PAMPA"})
 \end{aligned}$$

Expresar las cantidades individuales usando las variables y los datos del problema.

Para poder efectuar esta tercera etapa es útil elegir algunos valores específicos y así poder saber cómo usar la función objetivo. Esta técnica puede ser denominada “trabajo con un ejemplo específico” (o especificación del modelo) y se comienza por elegir un valor cualquiera y razonable para cada variable:

Por ejemplo, para este caso, podemos elegir, podemos *suponer*, una producción semanal de 10 mil litros de “GUARANÍ” y de 20 mil de “PAMPA”:

Ganancia de “GUARANÍ” x Producción semanal de “GUARANÍ”	= 3 \$/kl x 10 kl/semana	30 \$/sem
	=	
Ganancia de “PAMPA” x Producción semanal de “PAMPA”	= 5 \$/kl x 20 kl/semana	100 \$/sem
	=	
Ganancia total		130 \$/sem

Este análisis no resuelve el problema, pero sirve para mostrar como plantearlo. Ahora es sencillo transformarlo:

Ganancia de “GUARANÍ” x Producción semanal de “GUARANÍ”	3 X ₁
Ganancia de “PAMPA” x Producción semanal de “PAMPA”	5 X ₂
Ganancia total =	3 X ₁ + 5 X ₂

Por tanto, la función objetivo será

$$\text{Maximizar } 3 X_1 + 5 X_2$$

Cuarta etapa: Identificación de las restricciones.

Es evidente que los problemas de este tipo no tienen solución si no se plantean las restricciones o límites. Estas restricciones surgen, en general, de:

- **Limitaciones físicas.** (horas de trabajo, capacidad de producción, cantidad de materia prima, etc.)
- **Limitaciones de ventas** (por ejemplo, compromisos con un cliente, políticas de ventas, etc.)
- **Limitaciones externas** (por ejemplo, la imposibilidad de colocar en el mercado por encima de cierta cantidad)
- **Relaciones entre variables** (por ejemplo, la imposibilidad que la suma de variables sea superior a un número fijo, lo que vale en porcentajes, tantos por uno o partes de una unidad productiva)
- **Restricciones lógicas** (por ejemplo, no puede producirse – 1000 litros de alcohol o no pueden fabricarse 6,35 pianos)

Para el caso de la producción de alcoholes:

Limitación física: límite de horas/hombre semanales disponibles para producción y rectificado

En forma verbal: las horas totales semanales en elaboración no pueden superar las 230.

Descomposición: las horas usadas para “GUARANÍ” + las horas usadas para “PAMPA” no pueden superar las 230

En forma Matemática: Al llegar a este punto se evidencia que faltan datos. Falta conocer cuánto tiempo se emplea en la elaboración de cada producto. Lo que debe notarse es que, a diferencia de los “problemas” que se solucionan en clase (donde el enunciado incluye los datos) en los casos de la vida real, primero debe abordarse el método de solución para recién después determinar cuáles son los datos que se necesitan. Lo contrario, es decir, disponer *antes* de los datos implicaría tener a disposición una enorme cantidad de datos, la mayoría inservibles, con los costos que esto supone y el riesgo de error u obsolescencia.

Supóngase que se obtienen los siguientes datos, averiguando en la planta o buscando los antecedentes que correspondan (Recuerde e insistimos, los datos, en general, hay que buscarlos, una vez que se identifica lo que se necesita):

Horas/hombre por 1000 litros elaborados			
Sector	Producto →	Guaraní	Pampa
Producción		2	1
Rectificado		1	2

Con estos datos se podrá escribir la restricción en forma genérica, para cualquier valor de las variables establecidas al principio:

$$\begin{aligned}
 & \text{horas hombre necesarias para producir una unidad de "GUARANÍ"} \\
 & \quad \times \\
 & \quad \text{unidades producidas de "GUARANÍ"} \\
 & \quad + \\
 & \quad \text{horas hombres necesarias para producir una unidad de "PAMPA"} \\
 & \quad \quad \times \\
 & \quad \quad \text{unidades de "PAMPA" producidas} \\
 & \quad \quad = \\
 & \quad \text{horas hombres usadas en el sector.}
 \end{aligned}$$

Limitación física 1: límite de horas/hombre disponibles en el sector Elaboración

$$2x_1 + 1x_2 \leq 230$$

(dimensionalmente [hh/kl] x [kl/sem] = [hh/sem])

Se lee: gastando a razón de 2 Hh/kl elaborado de AA01 multiplicando por la cantidad de kl/sem de AA01 que se va a elaborar más 1 Hh/kl de AA02 por la cantidad de kl/sem de AA02 a elaborar no se deben superar las 230 Hh/sem disponibles en el sector

Limitación física 2: límite de horas/hombre disponibles para rectificación

$$1x_1 + 2x_2 \leq 250$$

Limitación externa: restricción de límite de producción. No pueden venderse más de 120 mil litros/semana de "PAMPA":

$$x_2 \leq 120$$

Limitaciones lógicas: restricción de no negatividad

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Formulación matemática del problema:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \equiv \text{Max}$$

Sujeto a:

(Producción)	$2x_1 + 1x_2 \leq 230$
(Rectificado)	$1x_1 + 2x_2 \leq 250$
(Demanda)	$0x_1 + 1x_2 \leq 120$
(No negatividad)	$1x_1 + 0x_2 \geq 0$
(No negatividad)	$0x_1 + 1x_2 \geq 0$

Para verificar la validez del modelo hallado se pueden hacer las siguientes pruebas de coherencia:

¿es posible decidir no fabricar nada? ($X_1 = 0, X_2 = 0$).

Si. Verifica todos los componentes del modelo, aunque $Z = 0$ (difícil que sea un máximo) todas las condiciones se satisfacen simultáneamente.

¿es posible fabricar $X_2 = 120$ kl/sem y no fabricar X_1 ?

Sí. Sería emplear el criterio de fabricar todo lo que se puede del alcohol AA02 que da la máxima ganancia: $X_1 = 0$;

$$X_2 = 120.$$

$$Z = 600,$$

$$120 < 230;$$

$$240 < 250$$

$$120 = 120.$$

Todo queda satisfecho

¿es posible fabricar $X_1 = 200$ y $X_2 = 300$.

No. Si bien da un Z alto (2100), no se satisfacen las inecuaciones.

Por tanto, el modelo parece lógico y funcional. Este modelo será retomado para poder discutir cómo resolverlo.

Problemas de redes

Con el objetivo de mostrar otros casos en los cuales se construyen modelos similares, veremos en este apartado, y en el que sigue, ejemplos que abordan relaciones entre nodos.

En el primer caso son nodos agrupados bajo la denominación convencional de “plantas” que se relacionan mediante vínculos con nodos agrupados bajo la denominación “centros de distribución”.

Este tipo de planteos se conoce con el nombre de “Problemas de Transporte”, debido a que de esta manera es más fácil comprenderlos. Sin embargo, la aplicación de estos modelos no se restringe solo al transporte, sino que alcanza a varias otras situaciones, como se ve en otros capítulos.

Resulta necesario conocer ciertos datos del problema:

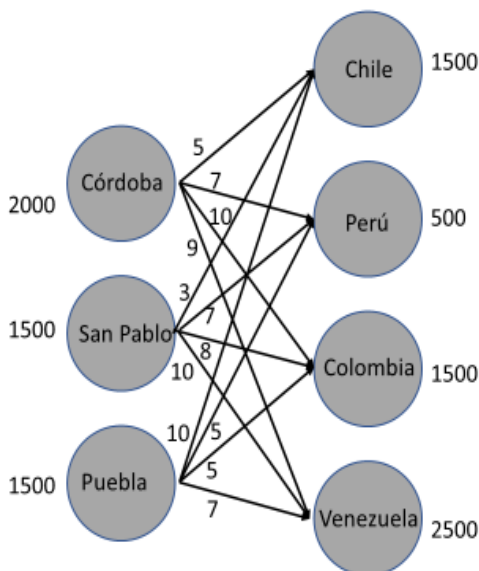
1. demandas de cada centro de destino (cliente, mercado, etc.)
2. capacidad de elaboración de cada centro de producción (planta, fábrica)
3. costo de transporte unitario desde cada fábrica a cada destino.

CASO:

Una empresa automotriz tiene plantas en Córdoba (Argentina), San Pablo (Brasil) y Puebla (Méjico) en las cuales produce un modelo de vehículo que se comercializa, además de localmente, en Chile, Perú, Colombia y Venezuela. La planta Córdoba produce, para exportación, 2000 unidades/mes y las otras dos 1500 unidades/mes cada una. Chile requiere 1000, Perú requiere 500, Colombia requiere 1500 y Venezuela 2500 unidades/mes.

Los costos de embarque de cada unidad desde la planta a cada centro, son:

PLANTAS	DISTRIBUIDORES			
	CHILE	PERU	COLOMBIA	VENEZUELA
CORDOBA	5	7	10	9
SAN PABLO	7	7	8	10
PUEBLA	10	8	5	7



En este tipo de casos, antes de expresarlos matemáticamente, se puede visualizar el problema usando un diagrama de redes, donde cada elemento de salida o llegada (planta o centro de distribución) será un nodo, y los podemos representar con un círculo. Cada línea indica la posibilidad de llevar un vehículo entre esos dos nodos. Junto a cada nodo se coloca la oferta o demanda, según sea emisor o receptor y en cada línea (llamada arco) se indica el costo de transporte.

Identificación de las variables de decisión

Nuevamente, hay que identificar:

- a) los elementos que afectan los costos, las ganancias o lo que represente el objetivo global del problema.
- b) los elementos que puede elegir y/o controlar con libertad.
- c) las decisiones que hay que tomar
- d) la información que deberá disponer quien quiere llevar adelante la solución propuesta cuando se solucione el problema.

Al identificar estos elementos, veremos que hay doce variables de decisión: el número de autos a embarcar en todas y cada una de las rutas desde cada centro a cada distribuidor.

Estas variables se pueden identificar de cualquier manera: x_1, x_2, \dots o bien $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, \dots$ o bien más explícitamente $x_{CB-CH}, x_{CB-PE}, \dots$

Y se pueden expresar

En forma verbal: Minimizar los costos de transporte desde todas las plantas a todos los distribuidores.

Descomposición: Minimizar costo de transporte desde Córdoba hasta Chile, hasta Perú, hasta Colombia y hasta Venezuela, más el costo de transporte desde San Pablo hasta Chile, hasta Perú, hasta Colombia y hasta Venezuela, más el costo de transporte desde Puebla hasta Chile, hasta Perú, hasta Colombia y hasta Venezuela.

Entendiendo *costo de transporte* como el costo de transportar una unidad entre un origen y un destino (ruta) multiplicado por el número de unidades transportadas entre esos extremos.

Si se hace el ejemplo específico y se pasa a una expresión matemática, queda:

Minimizar

$$\begin{aligned} & (5x_{CB/CH} + 7x_{CB/PE} + 10x_{CB/CO} + 9x_{CB/VE}) + \\ & + (7x_{SP/CH} + 7x_{SP/PE} + 8x_{SP/CO} + 10x_{SP/VE}) + \\ & + (10x_{PU/CH} + 8x_{PU/PE} + 5x_{PU/CO} + 7x_{PU/VE}) \end{aligned}$$

Identificación de restricciones.

Se comienza averiguando que elementos son los que impiden elegir cualquier valor. Por ejemplo, para minimizar costos de transporte, lo ideal es no transportar. ¿Se puede elegir el cero?

Las restricciones surgen de considerar:

- el embarque de cada planta no debe exceder lo que la planta produce
- el recibo de cada centro debe ser lo que necesita para satisfacer la demanda. Pero hay que saber si no se puede enviar más que lo que demanda. Parece que este no es el caso, pero no puede haber ambigüedades.
- Cada planta debe despachar todas sus unidades (no es posible que queden remanentes).
- el envío debe ser de números positivos enteros, (no es posible enviar 0,345 vehículos).

Todas estas restricciones deberán ser convertidas a expresiones matemáticas. Para ello, es necesario tener en cuenta que en cada nodo de salida no se puede superar la capacidad de producción de la planta: desde Córdoba., por ejemplo, el número total de unidades despachadas será igual a la suma de las unidades despachadas a Chile, más las enviadas a Perú, más las que fueron a Colombia más las que fueron a Venezuela.

Pero tenemos otra restricción: esa suma no puede ser superior a 2000, aunque, por la manera en que se plantea el problema tampoco podría ser inferior ya que no se encuentra en el planteo la frase “el sobrante se destina a...”

$x_{PU/CH} + x_{PU/PE} + x_{PU/CO} + x_{PU/VE} \leq 2000$, en el caso de que se admitan sobrantes
 $x_{PU/CH} + x_{PU/PE} + x_{PU/CO} + x_{PU/VE} = 2000$, en el caso que haya que embarcar todo lo producido

Lo mismo para cada una de las otras dos terminales.

Luego hay que observar las restricciones de demanda: cada distribuidor recibirá lo que necesita (lo que solicitó en firme): Las unidades recibidas en Chile serán la suma de las despachadas desde Buenos Aires más las de San Pablo más las de Puebla, y debe ser igual a su demanda (1000)

$$X_{CB/CH} + x_{JSP/CH} + x_{PU/CH} = 1000$$

y así para los otros tres distribuidores.

Finalmente hay que considerar las restricciones de no negatividad y de enteros. El resultado final será:

Minimizar $(10x_{PU/CH} + 8x_{PU/PE} + 5x_{PU/CO} + 7x_{PU/VE})$
 $(7x_{SP/CH} + 7x_{SP/PE} + 8x_{SP/CO} + 10x_{SP/VE}) +$
 $(5x_{CB/CH} + 7x_{CB/PE} + 10x_{CB/CO} + 9x_{CB/VE})$

Sujeto a:

$$x_{PU/CH} + x_{PU/PE} + x_{PU/CO} + x_{PU/VE} = 2000 \quad \text{Capacidad}$$

Córdoba.

$$x_{SP/CH} + x_{SP/PE} + x_{SP/CO} + x_{SP/VE} = 1500 \quad \text{Capacidad San}$$

Pablo

$$x_{CB/CH} + x_{CB/PE} + x_{CB/CO} + x_{CB/VE} = 1500 \quad \text{Capacidad}$$

Puebla

$$x_{PU/CH} + x_{SP/CH} + x_{CB/CH} = 1000 \quad \text{Demanda Chile}$$

$$x_{PU/PE} + x_{SP/PE} + x_{CB/PE} = 500 \quad \text{Demanda Perú}$$

$$x_{PU/CO} + x_{SP/CO} + x_{CB/CO} = 1500 \quad \text{Demanda}$$

Colombia

$$x_{PU/VE} + x_{SP/VE} + x_{CB/VE} = 1200 \quad \text{Demanda}$$

Venezuela

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y entero para todo } i, j$$

Problemas con variables binarias.

Otro tipo de problemas de redes son aquellos derivados de tomas de decisión con alternativas excluyentes. En ingeniería muchas veces aparecen problemas de toma de decisión que implican estrategias definidas por acciones binarias tales como se hace o no: Compra de una planta, realizar un proyecto, renovar un equipo, lanzar un producto. Generalmente estas decisiones se codifican con 0-1, que representan una variable entera restringida a esos valores.

CASO:

La compañía de inversores CIG recibe de parte de su cartera de demandantes de capital, cuatro propuestas, las cuales fueron analizadas por CIG, determinándose que tienen un rendimiento aceptablemente alto con un riesgo razonable y comparable entre ellas. También hay una buena estimación del retorno esperado en un horizonte de 4 años.

Las propuestas tienen proyectos que requieren de un programa de inversiones pautado en un plazo de cuatro cuotas de aporte de capital a efectivizar anualmente. La compañía *GIC* dispone de fondos a invertir y de un cronograma de desembolsos para cubrir esos cuatro años de los proyectos. Por otro lado, la inversión en telecomunicaciones y en electrónica comprende algunos aspectos tecnológicos que

se superponen, por lo tanto, se ha decidido invertir en uno u otro rubro, pero no en ambos simultáneamente.

Los fondos que no se usen un año no están disponibles en el año siguiente, se destinan a otros fines.

Todos los datos mencionados se sintetizan en la siguiente tabla:

PROYECTO	AÑO 1	AÑO 2	AÑO 3	AÑO 4	RETORNO
FARMACÉUTICO	60	10	10	10	250
TELECOMUNICACIONES.	35	35	35	35	375
ELECTRÓNICA	10	50	50	10	275
SUPERMERCADOS	15	10	10	40	140
FONDOS DISPONIBLES	90	80	80	50	

Identificación de las variables de decisión

Nos preguntamos: ¿qué se puede controlar libremente en este problema?, y la respuesta es: puede aceptarse o rechazarse la posibilidad de invertir en cada una de las propuestas:

Si llamamos F a la inversión en farmacia, entonces si $F = 1$, se invierte, $F = 0$ no se invierte. Si T es inversión en telecomunicaciones, $T = 1$, se invierte, $T = 0$, no se invierte y así E y S las otras variables. Estas variables de decisión son diferentes a las anteriores en tanto que el valor que pueden asumir ahora está restringido fuertemente a dos números enteros positivos, mientras que antes eran positivos (miles de litros de alcohol) o positivos enteros (autos a transportar).

Identificación de la función objetivo

Como el rendimiento total será la suma de los rendimientos en cada una de las cuatro compañías, debe formularse la siguiente pregunta: ¿Cuánto rendirá lo invertido en – por ejemplo – farmacia? El rendimiento será el retorno esperado por unidad monetaria multiplicado por la decisión de invertir:

Rendimiento en farmacia = $250 F$
(si la decisión, F, vale 1 el retorno es 250, caso contrario es cero)

Entonces el rendimiento total será
Rendimiento total = $250 F + 375 T + 275 E + 140 C$

Identificación de las restricciones

Se pueden identificar los siguientes grupos de restricciones:

disponibilidad financiera anual.

Imposibilidad de invertir simultáneamente en electrónica y comunicaciones.

Restricciones lógicas.

1) Disponibilidad monetaria anual.

La limitación de fondos por año impide seleccionar los cuatro proyectos a la vez. Como la cifra es variable, se necesita una restricción de este tipo por año:

Los fondos totales para invertir en todos y cada proyecto seleccionado en el primer año deberán ser, como máximo, de 90

Y, por otro lado, cada proyecto aporta acumulativamente al total:

Fondos totales para invertir en el primer año	=	Inversión en farmacia	+	inversión en electrónica	+	inversión en tele- comunicaciones	+	inversión en super- mercados
---	---	-----------------------------	---	--------------------------------	---	---	---	------------------------------------

Si esto se expresa con símbolos matemáticos para el primer año, se tiene que la suma de lo que necesita cada proyecto por la variable de decisión (cuyo valor será 0 o 1) dará la inversión total:

$$60F + 35T + 10E + 15S \leq 90 \quad (\text{año 1})$$

con los datos de la tabla se completan los demás años:

$$10F + 35T + 50E + 10S \leq 80 \quad (\text{año 2})$$

$$10F + 35T + 50E + 10S \leq 80 \quad (\text{año 3})$$

$$10F + 35T + 10E + 40S \leq 50 \quad (\text{año 4})$$

2) Imposibilidad de invertir simultáneamente en electrónica y en telecomunicaciones:

Se puede plantear como $T \cdot E = 0$

o como $T + E \leq 1$

3) Restricciones lógicas

F, T, E y S son 0 o 1 y enteros.

Planteo del modelo completo:

Maximizar Rendimiento total

$$250F + 375T + 275E + 140C$$

Sujeto a:

(Año 1) $60F + 35T + 10E + 15S \leq 90$

(Año 2) $10F + 35T + 50E + 10S \leq 80$

(Año 3) $10F + 35T + 50E + 10S \leq 80$

(Año 4) $10F + 35T + 10E + 40S \leq 50$

(No inversión simultánea) $0F + T + E + 0S \leq 1$

(Lógicas) $F, T, E \text{ y } S \text{ son } 0 \text{ o } 1 \text{ y enteros.}$

Noticias Históricas

George Dantzig (1914-2005), matemático estadounidense hijo de padre ruso y madre polaca. Es el protagonista de una anécdota que se ha convertido en leyenda urbana – y por tanto deformada – que se puede resumir como sigue: Tras obtener la licenciatura en matemáticas por la Universidad de Maryland, Dantzig obtuvo un puesto de asistente en Berkeley, y comenzó a realizar sus estudios de doctorado con Jerzy Neyman. Cierta día llegó tarde a clase, y vio como el Prof. Neyman había escrito dos problemas en la pizarra. Se trataba de dos ejemplos de famosos problemas estadísticos no resueltos aún, pero Dantzig creyó que eran tarea de clase. Intentó resolverlos en casa, y aunque según sus propias palabras “parecían más difíciles de lo habitual”, finalmente completó la resolución y se las entregó a Neyman unos días más tarde, disculpándose por el retraso. Seis semanas después, Neyman fue a buscarlo muy excitado. Había verificado sus soluciones, y comenzado a escribir el artículo científico en el que publicarían inmediatamente una de ellas. La solución al otro problema fue publicada 11 años más tarde por otro matemático, Abraham Wald, que al saber de la solución de Dantzig, lo incluyó como co-autor del artículo. (Fuente: Wordpress.com, La Singularidad Desnuda)

Segunda Guerra Mundial

La Segunda Guerra Mundial se desarrolló entre 1939 y 1945 e involucró a la mayor parte de los países del mundo, agrupados en dos alianzas militares enfrentadas: los llamados “Aliados” y el denominado “Eje”. Fue la mayor contienda bélica de la Historia, con más de cien millones de tropas involucrados y un estado de guerra total en el que se destinaron grandes recursos económicos, militares, civiles y científico-tecnológicos al esfuerzo bélico. Tuvo acciones de enorme repercusión como el asesinato masivo de población civil, el Holocausto, los bombardeos indiscriminados sobre ciudades y el uso, por primera y única vez, de armas nucleares. Resultó con un estimado de entre 50 y 70 millones de víctimas (2.5% de la población mundial). En el comienzo del conflicto se produjo la declaración de guerra a Alemania por parte de Francia junto con la mayor parte de los países del Imperio británico y la Commonwealth. Alemania conquistó o sometió a gran parte de la Europa continental, poniendo en peligro extremo al territorio metropolitano de Gran Bretaña, que disponía de una fuerza naval considerable pero que era vulnerable por aire y fue amenazada en sus suministros provenientes de América del Norte y del Sur por flotas de submarinos llamadas “manadas de lobos”. Por otro lado, comenzó un sistemático bombardeo sobre Inglaterra, donde los alemanes bombardearon por más de cinco meses las ciudades más importantes, particularmente

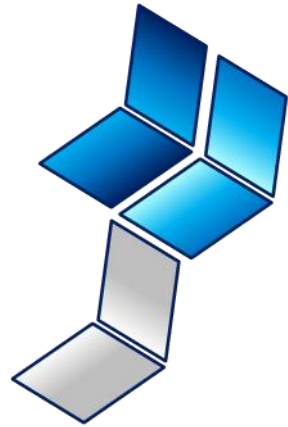
la capital, Londres y las ciudades importantes como Liverpool, Coventry, Bristol, Southampton, Birmingham, Swindon, Plymouth, Cardiff, Mánchester y Sheffield. Pese a ello, resistió firmemente y la Luftwaffe fue rechazada por la RAF con aviones que operaban coordinados con el sistema de operaciones en desarrollo, mientras que la Royal Navy mantenía el control del canal de la Mancha y aumentaba la eficacia en el hundimiento de submarinos que amenazaban la provisión del país. La *Blitz krieg* (guerra relámpago, en alemán) provocó alrededor de 43 000 muertes, y destruyó más de un millón de viviendas, pero fracasó en alcanzar los objetivos estratégicos de sacar a Inglaterra de la guerra o dejarla incapaz de resistir una invasión. Así, los planes de invasión alemanes fueron pospuestos indefinidamente. Posteriormente, los aliados desembarcaron en Europa continental y, en forma simultánea con el ejército ruso, convergieron sobre Berlín desde el este y desde el oeste dando fin a la parte europea de la contienda, la cual, sin embargo, se prolongó un tiempo más en el teatro de operaciones del pacífico, hasta la rendición del imperio de Japón.

La guerra de Vietnam

llamada también *Segunda Guerra de Indochina* o *guerra contra los Estados Unidos* por los vietnamitas, se desarrolló entre 1955 y 1975, originada en la negativa francesa a otorgar la independencia de lo que en ese momento era la Indochina Francesa (antes Cochinchina), a fines de la segunda Guerra Mundial y como reacción ante un posterior intento de unificar el país en un gobierno comunista, lo que fue resistido por la región sur del país (que se seccionó y constituyó en República de Vietnam quedando para el norte la denominación de República Democrática de Vietnam) La zona sur tuvo el apoyo de Estados Unidos, mientras que China y la Unión Soviética respaldaron tanto a un movimiento guerrillero llamado Frente Nacional de Liberación de Vietnam (Viet Cong) como al ejército de la República Democrática de Vietnam (Vietnam del Norte). Las muertes producidas por la guerra van entre 1 y 6 millones de personas. Los Estados Unidos sufrieron 60000 muertos y casi 2000 desaparecidos. Finalmente, la guerra terminó con la derrota del sur (previamente se había retirado Estados Unidos de la contienda) y la creación de la República Socialista de Vietnam en 1976.

Las primeras etapas de la guerra se desarrollaron sin las tradicionales líneas de frente, mediante guerra de guerrillas oponiéndose a bombardeos masivos y de armas químicas por parte de los Estados Unidos. La última fase fue una guerra convencional. En la planificación táctica de estos ataques de bombardeo se emplearon las técnicas derivadas del método Simplex.





Capítulo 2.

Programación lineal.

Método gráfico.

En este capítulo desarrollamos un sencillo método para la resolución de los modelos planteados en el capítulo anterior. Este método para resolver los modelos (y otros que se verán posteriormente) reciben la denominación genérica de modelos de Programación Lineal. Para estudiar el método gráfico, vamos a seguir con el caso ejemplo de Alcoholera Argentina presentado en el planteo general de modelos:

Planeamiento de la producción en Alcoholera Argentina.

AA produce dos alcoholes, GUARANÍ y PAMPA, en su planta San Nicolás. La planta tiene dos secciones: producción y rectificado.

En producción se obtiene el alcohol base operando 40 horas semanales y empleando cinco trabajadores de tiempo completo y a dos que trabajan quince horas semanales. Se dispone así de un máximo de 230 horas de trabajo semanales.

Una vez terminado el alcohol base, éste pasa al sector de rectificado, que tiene equipos operados por seis empleados de tiempo completo y uno de 10 horas semanales, lo que resulta en una disponibilidad de hasta 250 horas semanales de trabajo. Las horas requeridas en los dos sectores para producir un kilolitro de cada alcohol son:

	GUARANÍ	PAMPA
Producción (hH/kl)	2	1
Rectificado (hH/kl)	1	2
Ganancias (\$/kl)	3	5

En el cuadro anterior también se muestran los márgenes de ganancias para cada producto. AA no tiene problemas de materias primas para ambos productos. Puede vender todo lo que quiera de GUARANÍ pero tiene una demanda limitada a 120.000 litros semanales de PAMPA.

¿Qué cantidad semanal de cada producto debe producir AA para maximizar las ganancias?.

Siendo X_1 el número de miles de litros de GUARANÍ a producir y X_2 el de PAMPA, el problema se plantea:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Maximizar: } & Z = & 3 X_1 + & 5 X_2 & & \\
 \text{Sujeto a:} & & 2 X_1 + & X_2 \leq & 230 & \text{restricción 1, de producción} \\
 & & X_1 + & 2 X_2 \leq & 250 & \text{restricción 2, de rectificado} \\
 & & & X_2 \leq & 120 & \text{restricción 3, de demanda} \\
 & & X_1 + & 0 X_2 \geq & 0 & \text{restricción 4, de no negatividad} \\
 & & 0 X_1 + & X_2 \geq & 0 & \text{restricción 5, de no negatividad}
 \end{array}$$

¿Cómo hallar una solución? Una aproximación heurística.

Para poder encontrar una cantidad óptima para la producción de ambos alcoholes, se deben buscar valores de X_1 y X_2 que representen el plan de producción y la consecuente ganancia máxima a la vez que se satisfacen todas las restricciones simultáneamente.

¿Cómo lograrlo? Una forma de hacerlo es, simplemente tratar de solucionar el problema de manera intuitiva, de la siguiente manera: si el alcohol PAMPA es el que da máximas ganancias, entonces debería fabricarse Pampa todo lo posible, dejando de lado al otro alcohol.

Si vemos las restricciones e ignoramos a Guaraní (eso equivale a decir que no lo fabricamos, por tanto, hacemos $X_1 = 0$) observamos que X_2 puede, según la primera restricción, valer, como máximo, $250/2 = 125$, o 230 según la segunda, pero ninguno de estos valores pueden ser adoptados, porque la tercera restricción lo impide. Por tanto, lo máximo a producir de X_2 será 120 (expresados como kl de PAMPA).

La forma de expresar en términos prácticos lo del párrafo anterior, sería así: *“Como Pampa nos da la mayor ganancia, vamos a fabricar todo lo que podamos vender de Pampa, o sea, 120.000 litros, aunque tenemos recursos para fabricar 125.000 litros en un sector y 230.000 en el otro”*

Así, a raíz de este razonamiento, el plan de producción será $X_1 = 0$; $X_2 = 120$; con una ganancia $Z = 600$.

Lo siguiente que podría analizarse es: fijado el máximo de X_2 ¿Qué recursos sobrantes se pueden usar para fabricar – además – algo, lo más posible, de X_1 ? Para responder, nuevamente analizaríamos cada una de las restricciones:

$$\begin{aligned}2X_1 + 120 &\leq 230 \\X_1 + 2 \cdot 120 &\leq 250 \\120 &= 120\end{aligned}$$

reemplazando X_2 (lo que ya decidimos fabricar) por su valor (120), entonces podremos calcular lo que se puede hacer con X_1 :

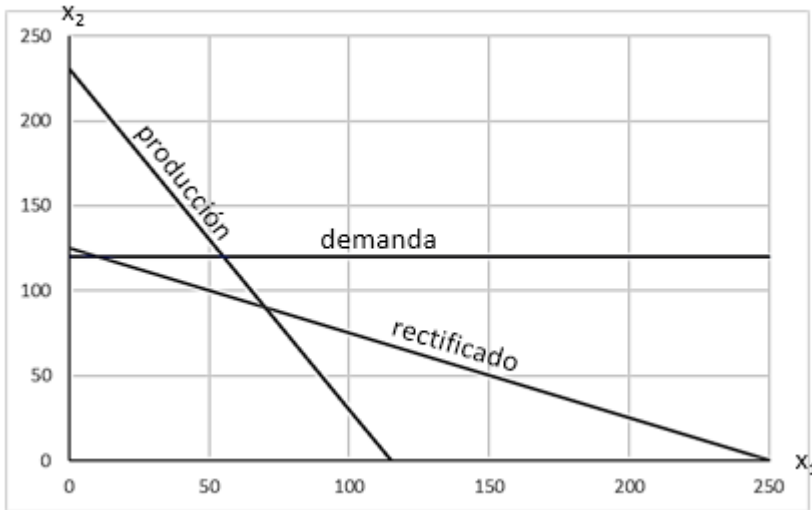
En la primera, el máximo de X_1 es 55, lo que resulta incompatible con la segunda restricción, ya que, si se reemplazan en ella, queda $55 + 240 = 290$ que, obviamente, no es menor a 250.

Si en vez de usar la primera, usamos la segunda y despejamos en ella X_1 , se obtiene que el máximo valor posible para X_1 es de 10, lo que resulta compatible con la primera restricción y, por lo tanto, es lo máximo que se puede elaborar de X_1 .

En ese caso, el plan de producción será $X_1 = 10$; $X_2 = 120$; con una ganancia $Z = 630$. Vemos que encontramos un plan de producción que cumple con todas las restricciones y que da una ganancia que parece ser la mayor, no obstante, buscaremos una forma más sistemática para encontrar la solución. Para hacerlo, y aprovechando que este

modelo solo tiene dos variables de decisión, comenzaremos por graficar los elementos que constituyen el modelo

Gráfica de restricciones



Para graficar cada restricción comenzaremos ignorando la desigualdad y tratando la función como si fuera una igualdad. Luego de trazada cada una de las curvas, vamos a analizar el gráfico para ver que parte del plano corresponde a la desigualdad.

Las últimas dos restricciones coinciden con los ejes de coordenadas y, si se tiene en cuenta el sentido de la desigualdad, determinan como espacio factible solamente al primer cuadrante. Si se grafican todas las restricciones como igualdades se obtiene el gráfico de la figura de arriba.

Como siguiente paso determinaremos, en cada restricción, cuáles son los valores factibles: aquellos valores permitidos por la inecuación.

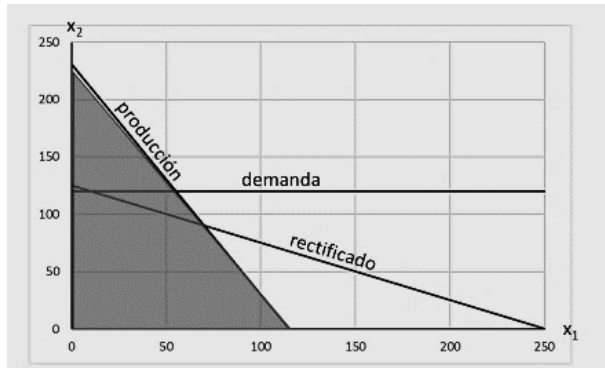
Para la primera restricción son aquellos que cumplen con

$$2X_1 + X_2 \leq 230,$$

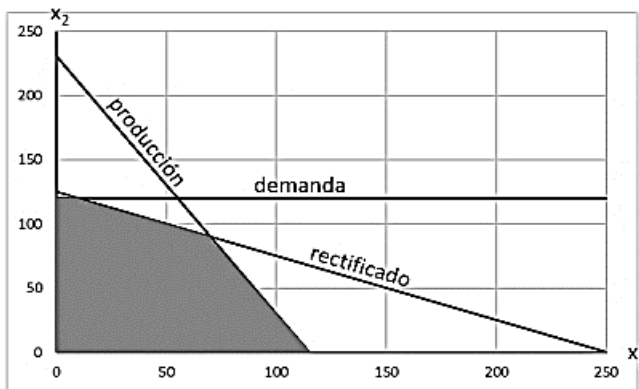
lo cual significa que la recta graficada

$$(2X_1 + X_2 = 230),$$

representa a los valores factibles, aunque no a todos ya que también los son todos los puntos ubicados desde dicha recta hasta el origen de coordenadas, que se muestran en la figura como un área sombreada.



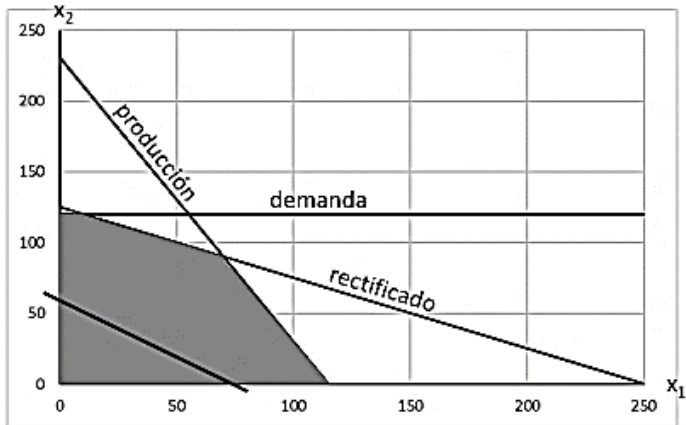
Una vez que fueron consideradas todas las restricciones queda determinada un área factible que es la intersección de las áreas determinadas por cada restricción:



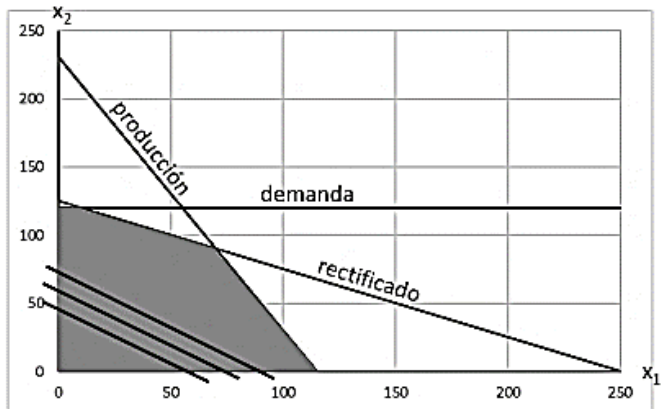
Ese polígono limita una superficie en la cual las coordenadas $(x_1; x_2)$ de todos y cada uno de sus puntos cumplen con todas las restricciones: el eje X_2 a la derecha es la última restricción, el eje X_1 hacia arriba es la anteúltima y así sucesivamente. Significa que cualquier solución al problema debe ubicarse forzosamente dentro del área sombreada o en sus límites, ya que este conjunto determina lo que es admitido por las restricciones.

En el gráfico de la figura se ha agregado la función objetivo, dibujada arbitrariamente en un valor de

$$X_2 = 60 \text{ y de } X_1 = 75.$$



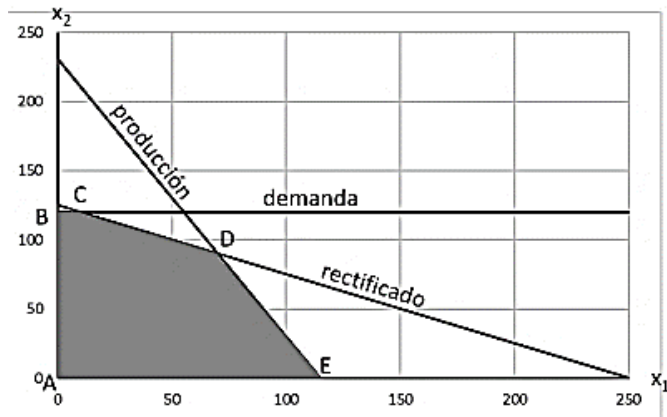
Resulta evidente que pueden graficarse para cada valor de X_1 y de X_2 una curva $3X_1 + 5X_2$, a pendiente constante e igual a $-3/5$ y a ordenada al origen variable e igual a $Z/5$. La que se muestra está igualada a $Z = 210$, pero hay un manojito de esas curvas que caen dentro del espacio de soluciones factibles:



Obviamente será la solución óptima aquella que pase por alguno de los puntos extremos del área sombreada, entendiendo como "extremo" a aquel punto que se encuentre lo más alejado posible del origen (como es una maximización, alejarse del origen es alejarse de "no fabricar nada" y, por tanto aumentar las ganancias).

¿De qué depende que un vértice en particular sea el más “alejado”? Obviamente de la pendiente de la función objetivo.

Los puntos extremos – o más alejados del origen – más el



mismo origen son los vértices de ese polígono y se designan con las letras A, B, C, D y E en la figura de la derecha:

Para encontrar cuál es el vértice más alejado, hay que conocer cuál es la pendiente de la función objetivo. Por ejemplo, si el alcohol GUARANÍ, que en este caso brinda una ganancia de 3 \$/kl pasara a no dar ganancias, la pendiente pasaría a ser nula, y por tanto la recta sería horizontal: implicaría fabricar solamente PAMPA (punto B) o, indistintamente y sin que cambie nada, el punto C.

Al contrario, si la ganancia en vez de 3 fuera enorme, desproporcionada en relación con los 5 \$/kl de PAMPA, la pendiente tendería a infinito, recta vertical, y el punto se ubicaría en E (no fabricar nada de PAMPA y todo de GUARANÍ)

Observando la figura se ve que, si la pendiente de Z fuera nula, la recta sería horizontal y el eje más lejano sería el “B”. En ese caso la ganancia del alcohol 1 sería cero, entonces ¿Por qué fabricarlo?

Por otro lado, si la ganancia del alcohol 2 pasara de 5 a un valor nulo, la curva Z tendría pendiente infinita, sería vertical y entonces el punto más alejando sería el vértice “E” (Obvio: si no se gana nada por producir el alcohol 2, entonces hay que hacer todo alcohol 1)

La conclusión es: si el origen significa “no hacer nada”, entonces, para maximizar las ganancias hay que hacer lo más posible ya que eso permite lograr el objetivo. Cada uno de los vértices es una solución posible (en el sentido que está permitida) y son parte de un polígono.

Para analizar el caso actual con la pendiente $(-3/5)$ no hace falta graficar la función Z. Basta con estudiar el valor de ella en cada uno de los vértices. Los valores de estos vértices para las coordenadas x_1 y x_2 , y el valor de la función objetivo son:

VERTICE	X_1	X_2	F.Objetivo (Z)
A	0	0	0
B	0	120	600
C	10	120	630
D	70	90	660
E	115	0	345

Como el problema es maximizante seleccionaremos aquel vértice que corresponde al mayor valor de la función objetivo. El vértice D, que presenta una respuesta máxima de la función objetivo de 660, indica, por tanto, que lo óptimo es programar una producción de 70 y 90 mil litros de GUARANÍ y PAMPA respectivamente.

La solución analítica de este problema se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones que corresponde a las dos restricciones involucradas en cada vértice, con lo que se obtienen las coordenadas de ellos.

Vértice A:	Vértice B:	Vértice C:	Vértice D:	Vértice E:
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 120 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 = 120 \\ x_1 + 2x_2 = 250 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 230 \\ x_1 + 2x_2 = 250 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 230 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Particularmente, nos interesa el vértice D, porque representa el plan de producción óptimo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 230 \\ x_1 + 2x_2 = 250 \end{cases}$$

Finalmente, la expresión del resultado del modelo es:

Producción semanal de GUARANÍ:	70000 litros
Producción semanal de PAMPA:	90000 litros
Ganancia semanal:	$Z = 3 \times 70 + 5 \times 90 = \$ 660$

Casos especiales

Pueden presentarse los siguientes casos:

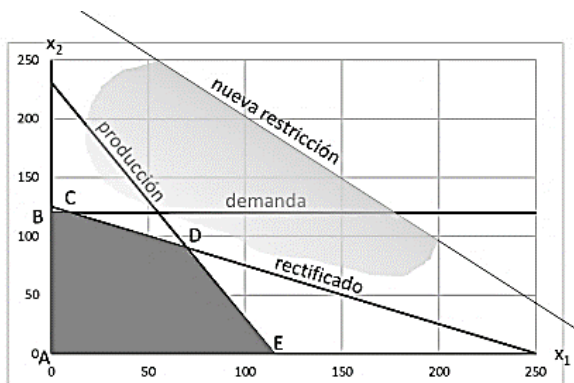
Programa lineal con una solución no factible: es un programa con una solución incapaz de satisfacer simultáneamente todas las restricciones. Ejemplo: si inventamos un nuevo problema, agregando una nueva restricción al problema anterior, que sea “*se debe producir no menos de 220000 litros de GUARANÍ*” ($X_1 \geq 220$), cuando grafique el área factible de soluciones verá que no hay espacio de soluciones posibles.

Modelos sin límites. Se da cuando por defecto de restricciones el área de soluciones factibles es ilimitada. Para ver un ejemplo, cambie una restricción al problema original de manera tal que la restricción $X_2 \leq 120$ pase a ser $X_2 \geq 230$. Este cambio provoca un área abierta e ilimitada. Sin embargo, debe observarse que un área de este tipo no siempre significa que el problema no tenga solución. Un área abierta a la derecha en un problema de minimización puede tener solución óptima satisfactoria para todas las restricciones.

Modelos con restricciones redundantes. Se trata de que una, o varias, de las restricciones de un modelo no afectan el área de factibilidad, estén o no presentes. Por ejemplo, la restricción

$$X_1 + X_2 \leq 300$$

insertada en el problema original, no altera el área de soluciones. (Nota: revise el modelo de variables binarias presentado en el capítulo anterior. Allí, ¿puede individualizar restricciones redundantes?)



Soluciones óptimas conjuntas: se encuentran dos vértices consecutivos como soluciones óptimas. Significa que el segmento que une esos vértices tiene la misma pendiente del funcional, por lo tanto, cualquier punto de ese segmento (inclusive los vértices) es una solución alternativa del problema y que se encuentran en una restricción paralela a la función objetivo

Análisis de sensibilidad gráfico

La resolución hallada para el modelo de la producción de Alcoholes Argentinos sería nos informa cuál es el plan de producción óptimo semanal de los dos productos que cumple con el criterio de darnos la máxima ganancia posible con las limitaciones de recursos que tenemos. A pesar de eso, esa información es muy pobre, ya que es casi inevitable que, en la vida real, surjan algunas nuevas preguntas relacionadas con detalles concretos, por ejemplo

¿Qué sucedería con la solución hallada si se decide bajar el precio de GUARANÍ de manera tal que el margen de ganancias descienda en \$ 0,25 por cada 1000 litros? Implica que en el modelo se cambiaría el coeficiente de la variable X_1 del funcional de 3 por mil litros a 2,75 por mil litros ¿cómo afecta esto al plan de producción?

¿Qué sucedería en la solución óptima y en la función objetivo si se modificara un valor del lado derecho de las restricciones? Por ejemplo, que los dos empleados de tiempo parcial que trabajan en producción 15 horas semanales pasen a trabajar 10. Esto haría que el disponible de horas de la primera restricción cambie de 230 a 220. ¿cómo nos afecta eso?

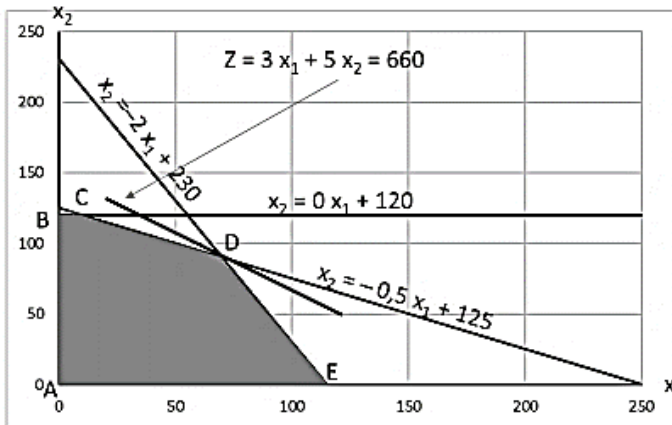
Análisis de sensibilidad de los coeficientes del funcional

El análisis de sensibilidad es una herramienta disponible en programación lineal que brinda información sobre la robustez de la solución hallada ya que permite encontrar criterios para saber qué ocurre con el óptimo y con la función objetivo cuando se modifican, de a uno por vez, los coeficientes de ella o que ocurre cuando cambian los valores del lado derecho de cada una de las restricciones.

¿Por qué puede ser necesario modificar un coeficiente del funcional? Además de la pregunta sobre el margen de ganancias que nos hicimos antes, también puede darse el caso de disponer de estimaciones con un cierto porcentaje de error: ¿qué ocurre

cuando se sitúa en los extremos de ese porcentaje? Por ejemplo, una ganancia de 10 \$ con 5% de error se calcula sobre la base de 10 \$, pero ¿qué pasa si el valor real es de 9,5 \$ o de 10,5?

Los valores del lado derecho de las restricciones, por otra parte, indican los montos extremos de recursos disponibles (en el caso que seguimos, las horas hombre semanales disponibles en cada sector, la cantidad máxima que se puede vender de un producto). Esto puede tener variaciones, por ejemplo, una contracción del mercado o ausencias de personal por enfermedad.



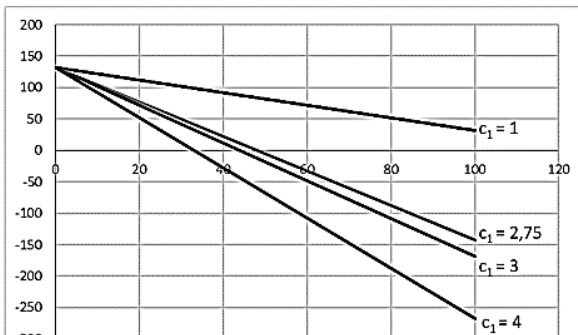
La figura anterior nos muestra el área factible y la recta que representa a la función objetivo que pasa por el punto D y que corresponde a $Z=660$

En el problema de los alcoholes, la fábrica produce 70 kilolitros de GUARANÍ y 90 kl de PAMPA, pero ahora vamos a analizar lo que ocurre con este plan ante la posibilidad de reducir el precio de venta de GUARANÍ de manera tal que las ganancias caigan en \$0,25 por cada kilolitro. Las razones de este cambio podrían estar relacionadas con la necesidad de hacer frente a la competencia que va a poner en el mercado un producto similar. La solución óptima, anteriormente hallada, es:

VERTICE	x_1	x_2	F.Objetivo (Z)
A	0	0	0
B	0	120	600
C	10	120	630
D	70	90	660
E	115	0	345

La disminución de \$ 0,25 en la ganancia de 1000 litros de GUARANÍ provoca la disminución del coeficiente c_1 de \$3 a 2,75, por lo tanto ¿qué pasa con la solución óptima – 70 kl y 90 kl – cuando el coeficiente de X_1 pasa de 3 a 2,75? Una forma de averiguarlo es hacer todo de nuevo con el nuevo coeficiente, pero con el análisis de sensibilidad se puede responder sin necesidad de rehacer el problema.

La figura muestra cómo cambia la función objetivo cuando varían los valores del coeficiente C_1 de la variable X_1 :



Es evidente que lo que cambia es la pendiente de la función. Si estas funciones se trasladan al gráfico completo se observa que hay pendientes que se escapan de las restricciones: si el coeficiente c_1 aumenta mucho su valor, la función objetivo tiende a ser vertical, por lo tanto, el vértice extremo podría pasar a ser el E luego que la pendiente del funcional $(-c_1/c_2)$ supere a la pendiente de la restricción 2 de rectificado.

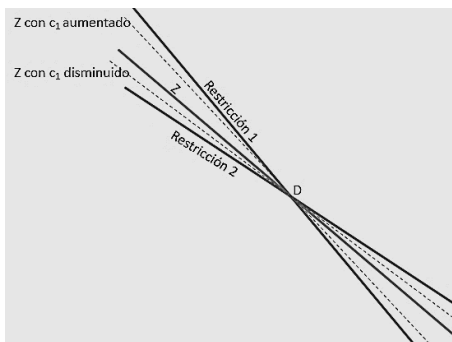
Por otro lado, valores bajos de c_1 hacen que la función objetivo tienda a ser horizontal, por lo tanto, el vértice extremo podría pasar a ser el C luego que la pendiente del funcional $(-c_1/c_2)$ supere a la pendiente de la restricción 1 de producción.

Para encontrar los valores extremos de esas pendientes se reescribe la función objetivo, pero reemplazando el coeficiente que se analiza por su símbolo, c_1

$$c_1 X_1 + 5X_2$$

así, la pendiente de Z es $-(c_1/5)$, y dado que la pendiente de la primera restricción es $-(2/1)$, el límite se encontrará cuando ambas sean iguales, por tanto

$$\begin{aligned} -(c_1/5) &= -(2/1) \\ c_1 &= 10 \end{aligned}$$



lo que quiere decir que mientras el coeficiente de X_1 que, inicialmente es 3, no supere el valor de 10, la solución actual sigue siendo la óptima, aunque el valor del funcional es diferente. Por ejemplo, cambiando el coeficiente de X_1 de 3 a 4 la propuesta de elaborar 70000 litros de GUARANÍ y 90000 de PAMPA sigue siendo óptima, pero el valor del funcional (Z) pasa de

$$3X_1 + 5X_2 = 660$$

a ser

$$4X_1 + 5X_2 = 730.$$

Por otra parte, cuando disminuye el valor del coeficiente, se observa que la pendiente de Z se acerca a la de la restricción 2. El cálculo a realizar será entonces

$$\begin{aligned} -(c_1/5) &= -(1/2) \\ c_1 &= 2,5 \end{aligned}$$

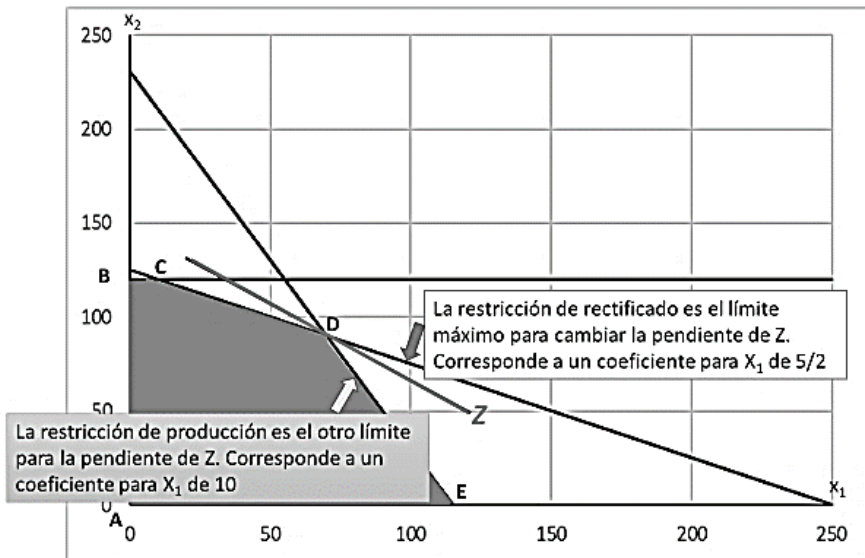
significa que mientras no se disminuya el coeficiente de X_1 a menos de 2,5 la solución será óptima y el valor del funcional cambiará.

En síntesis:

Para mantener la solución óptima hallada ($X_1 = 70$; $X_2 = 90$), el coeficiente de X_1 podrá variar desde 2,50 hasta 10.

$$2,50 \leq (c_1 = 3) \leq 10$$

La respuesta al interrogante planteado, entonces, es que la disminución de ganancias a 2,75 para GUARANÍ se puede hacer sin alterar el plan de producción, aunque, obviamente, disminuirán las ganancias totales.



La figura de arriba permite responder la pregunta: ¿Hasta dónde pueden cambiarse los coeficientes de X_1 cuando $Z=Z_{opt}$?

Análisis de sensibilidad para los valores del lado derecho

Una vez que sabemos que hay que elaborar 70 y 90 kl respectivamente de cada alcohol, vamos a intentar buscar la manera de responder algunas preguntas relacionadas con las disponibilidades, o los recursos, tales como:

¿Qué pasaría con las ganancias si cada uno de los empleados de tiempo parcial de producción trabajara 10 horas en lugar de 15?

Debido a que se utiliza totalmente el recurso mano de obra ¿aumenta la ganancia si uno de los empleados de tiempo parcial pasa a trabajar tiempo completo y se prescinde del otro?

¿Qué pasaría si se contrata otro empleado de tiempo completo en rectificado?

Tratar de responder estas cuestiones implica la posibilidad de modificar la estructura del problema. Por ejemplo, con la primera pregunta, si vemos la primera restricción, que fija el límite de recurso disponible en horas hombre en 230, habría que cambiarla

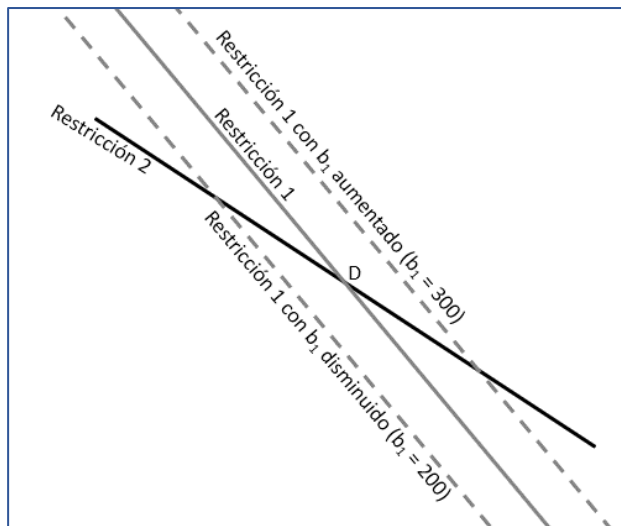
a un valor de 220. Podría expresarse así: ¿qué ocurre cuando el sector de producción dispone de un máximo de 220 hH/sem?

En esa misma línea, la segunda, entonces, sería: ¿Que ocurre con la función objetivo cuando el sector de producción pasa a tener una disponibilidad de 240 hH/sem?

La tercera: ¿Que ocurre con el funcional cuando en el sector de rectificado se disponen de 290 en lugar de 250 hH/sem?

Si se analiza gráficamente la incidencia de cambio en una restricción se advierte que los valores del lado derecho (los b_i) son proporcionales a la ordenada al origen de cada una

de las rectas que se usaron para limitar el espacio de soluciones factibles. La primera restricción, originalmente fijada como ≤ 230 , se puede graficar para valores distintos de la ordenada al origen como 100, 200, 300 siguiendo el criterio de reemplazar la desigualdad por una igualdad:



Para determinar hasta qué punto puede moverse la restricción, se convierte el límite derecho en una variable:

$$2X_1 + X_2 = b_1$$

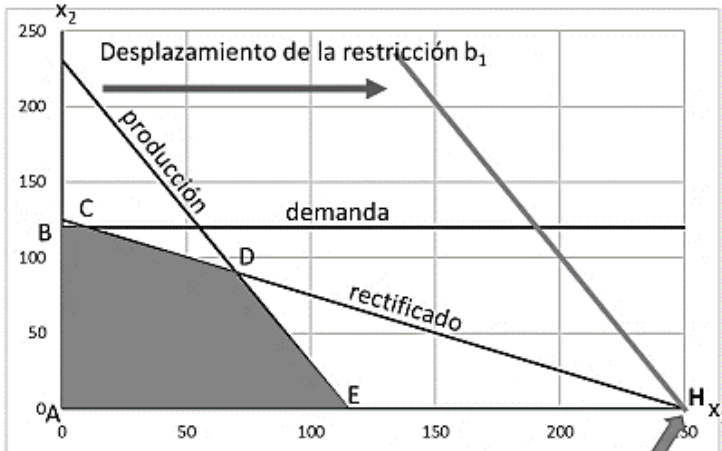
tal como se hizo para graficar. Esta recta puede incrementarse moviéndola hacia la derecha hasta que pase por el punto H, cuyas coordenadas son $X_1 = 250$ y $X_2 = 0$.

¿Por qué el punto H? porque más a la derecha no tiene sentido: la intersección entre ambas restricciones que dan el punto óptimo (producción y rectificado) cae fuera del espacio de soluciones factibles.

En ese punto H, el valor de b_1 se calcula reemplazando X_1 y X_2 por sus valores, que son sus coordenadas. Con ello se obtiene la respuesta a la pregunta ¿Qué disponibilidad de

horas hombre semanales tendría que haber dispuesto para operar la planta en el punto H?

$$2 \times 250 + 0 = 500$$



Punto H. Límite máximo de desplazamiento de la restricción b_1 impuesto por la restricción de rectificado (b_2)

Esto es así porque la solución primitiva es la intersección de las dos restricciones y esa raíz es el punto más alejado del origen dentro del primer cuadrante y del espacio permitido por las restricciones.

Entonces la restricción 1 puede desplazarse paralelamente a sí misma – pendiente constante – hasta llegar al valor $x_1 = 250$ como máximo para que el punto de operación original siga siendo el determinado por la raíz de las ecuaciones que representan a las dos restricciones (1 y 2), que es la respuesta original.

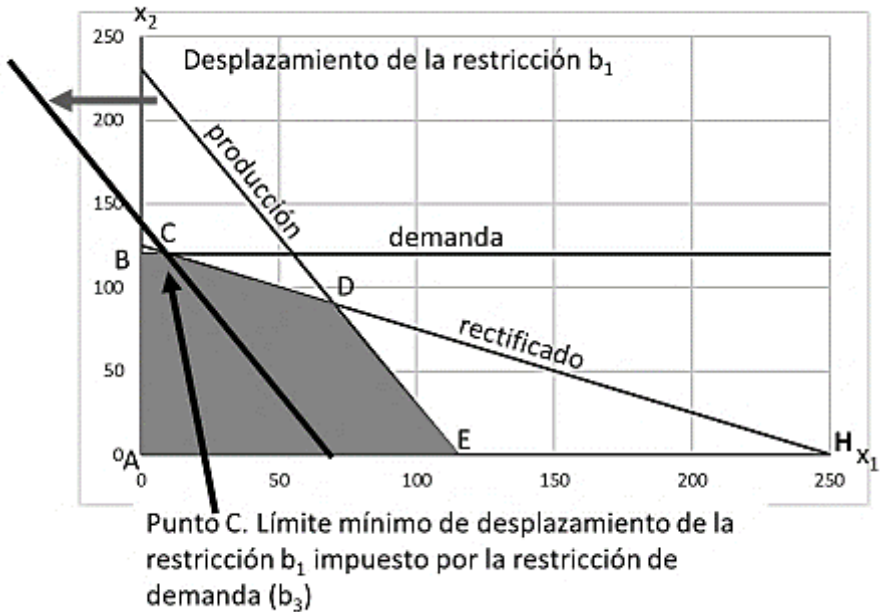
Para calcular el límite inferior del desplazamiento, o sea, hasta donde puede moverse sin que la solución pase a ser la intersección de otro par de restricciones, por ejemplo, la intersección de las restricciones 1 y 3, se procede igual:

$$2x_1 + x_2 = b_1$$

Las coordenadas del límite inferior serán $X_1 = 10$ y $X_2 = 120$:

$$2 \times 10 + 120 = 140$$

que es el límite de desplazamiento inferior de la restricción 1.



El conjunto permite ver los extremos de variabilidad de la restricción 1, si no cambian los otros datos del problema.

El óptimo sigue siendo la intersección de las restricciones 1 y 2. Pero los valores que asumen las variables cambian. Imagine que la recta de producción se “mueve” a pendiente constante, ya a la izquierda, ya a la derecha de su posición original, pero sin llegar ni al punto C ni al H. El punto D variará su ubicación, pero siempre será el punto más alejado de A para nuestra función objetivo: ese punto brindará, el valor de Z máximo con los recursos disponibles en él.

Valor del lado derecho de la restricción 1 (b_1)	Valor de las variables en el óptimo		Valor del funcional en el óptimo
	X_1	X_2	Z
140	10	120	630
200	50	100	650
230	70	90	660
300	116,7	66,7	683,6
500	250	0	750

Como esta variación en el funcional provocada por la variación de la restricción sigue un incremento lineal, se puede calcular su pendiente:

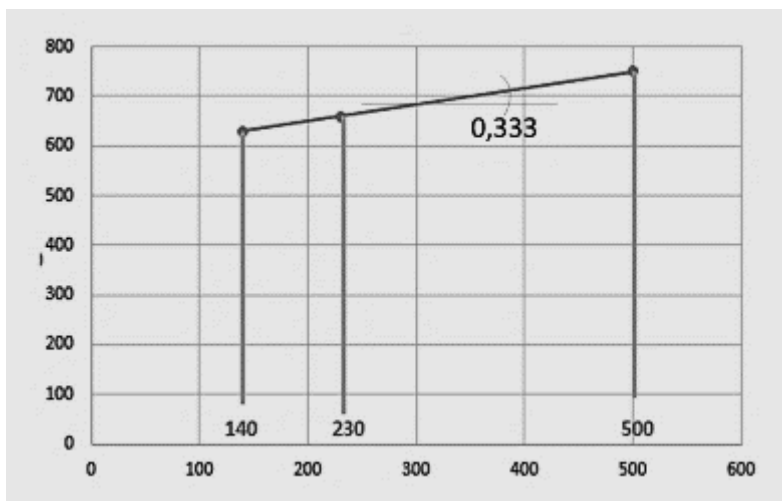
$$Pendiente = \frac{[Ganancia\ para\ b_1 = 500] - [Ganancia\ para\ b_1 = 140]}{[500] - [140]} = 0,3333$$

$$PS = \frac{Z_{500} - Z_{140}}{500 - 140} = \frac{Z_{b_{1Max}} - Z_{b_{1min}}}{b_{1Max} - b_{1min}}$$

Lo que se interpreta que por cada hora adicional de mano de obra disponible por encima del valor de 230 y hasta 500 el margen de ganancias se incrementará en 0,33 \$ y por debajo hasta 140 se decrementará también en 0,33 \$.

Esta pendiente representa un valor de cambio (0,3333) y se define como el **precio sombra del recurso b_1** .

De idéntica manera podría calcularse el **precio sombra** asociado con la restricción 2:



Valor del lado derecho de la restricción 2 (b_2)	Valor de las variables en el óptimo		Valor del funcional en el óptimo Z
	X_1	X_2	
115	115	0	345
200	86,7	56,7	543,33
250	70	90	660
275	61,7	106,7	718,33
295	55	120	765

Pendiente = 2,33

Entonces, por cada hora adicional del recurso mano de obra en rectificado, por encima del valor de 250 y hasta 295 horas, el margen de ganancias se incrementa en \$ 2,3333. Por otra parte, por cada hora de recorte en esa mano de obra, desde 250 hasta 115, se pierden \$2,3333

Ejemplo de aplicaciones del precio sombra:

Calcular el margen de ganancias de AA si cada uno de los empleados de tiempo parcial de producción trabaja 10 horas en lugar de 15.

Rta.: El valor de la restricción 1 pasa de 230 a 220. Este cambio cae dentro del intervalo 140—500:

$$\text{Nueva ganancia} = \text{vieja ganancia} - \text{precio sombra} \times \text{incremento hs mano de obra} =$$

$$\text{Nueva ganancia} = 660 - 0,33 \times 10 = 656,667$$

Calcular el margen de ganancias de AA si uno de los empleados tiempo parcial de producción pasa a tiempo completo y se prescinde del otro

Rta.: El valor de la restricción 1 se incrementa a 240, aun dentro del intervalo.

Nueva ganancia = vieja ganancia + precio sombra x incremento hs mano de obra

$$\text{Nueva ganancia} = 660 + 0,33 \times 10 = 663,33$$

Calcular el margen de ganancia si se contrata un obrero más de tiempo completo en rectificado.

Rta.: El valor de la restricción 2 pasa de 250 a 290 en un intervalo permisible de 115—295:

Nueva ganancia = vieja ganancia + precio sombra x incremento hs. mano de obra

$$\text{Nueva ganancia} = 660 + 2,33 \times 40 = 753,2$$

Análisis paramétrico de los valores del lado derecho

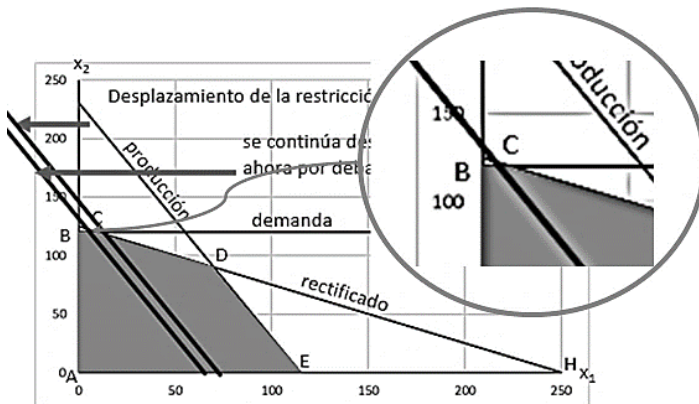
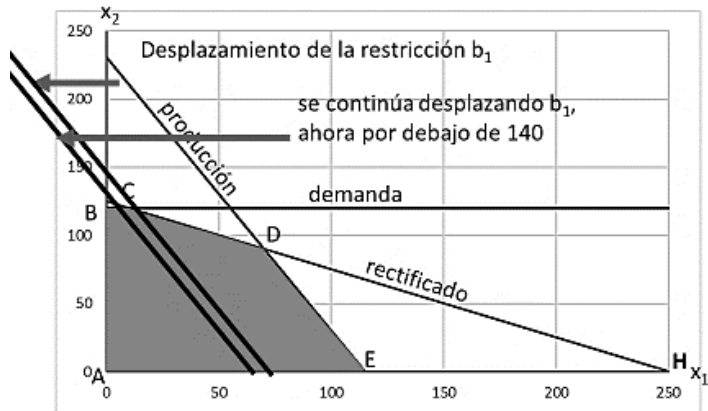
El análisis hecho en el punto anterior nos permite buscar respuestas ante posibles cambios siempre que los coeficientes se mantengan dentro del intervalo de sensibilidad. Lo que resta ahora es averiguar qué ocurre cuando los cambios exceden los límites que hemos encontrado.

Por ejemplo, se puede dar el caso de querer reducir el personal de elaboración a dos obreros de tiempo completo y uno de 30 horas semanales. Es equivalente a plantear el problema en los siguientes términos:

Averiguar lo que sucede con el margen de ganancias óptimo, si el valor del lado derecho de la restricción 1 pasa de 230 a 110 (dos empleados de 40hs más uno de 30hs).

Observamos que el valor nuevo está fuera del intervalo de sensibilidad 140—500 calculado antes para la restricción 1. El análisis paramétrico permite evaluar cualquier cambio (ya sea dentro como fuera del intervalo del análisis de sensibilidad) en una restricción particular.

Si revisamos nuevamente las restricciones originales, vemos que mientras la restricción 1 no disminuya debajo de 140, la solución será la intersección de las restricciones 1 y 2, pero cuando cae debajo de 140 la solución pasa a ser la intersección de las restricciones 1 y 3, por lo que el precio sombra cambia en el punto 140



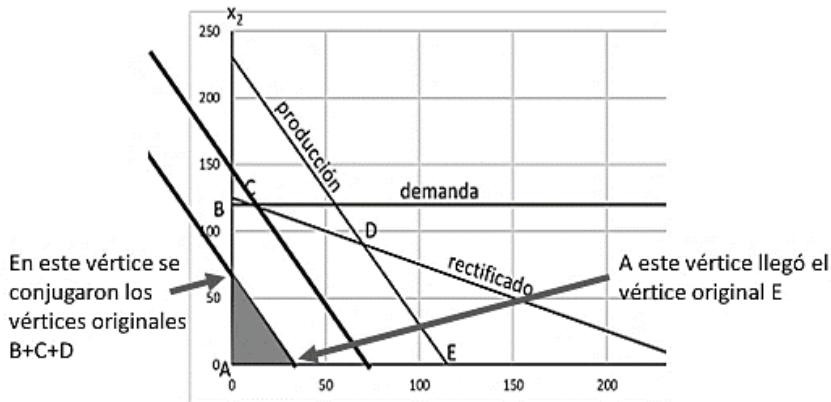
Así, el nuevo precio sombra para el intervalo 120-140 será

$$PS = \frac{[Ganancia\ para\ b_1 = 140] - [Ganancia\ para\ b_1 = 120]}{[140] - [120]} = 1,5$$

de esta manera podremos predecir la ganancia nueva fácilmente:

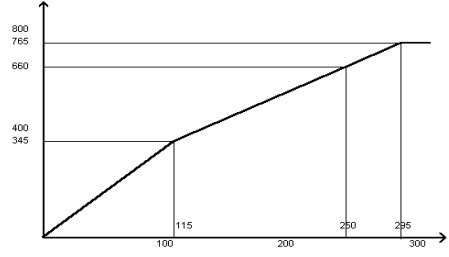
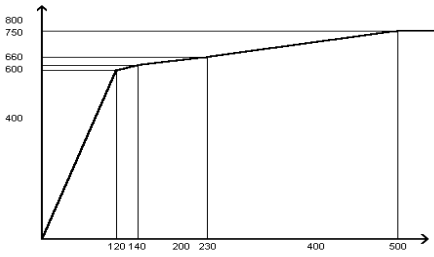
Ganancia nueva = ganancia en 140 hs – precio sombra x número de horas debajo de 140.

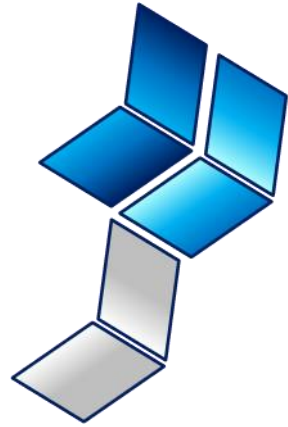
Si la restricción se reduce por debajo de 120, pero positiva, la solución será la intersección de las restricciones 1 y 4



A partir de ese punto la ganancia será ganancia con las 120 hs – precio sombra por número de horas debajo de 120.

Con toda esta información se construye un diagrama para cada restricción que represente como influye en el funcional el cambio del valor del lado derecho correspondiente. Este diagrama se denomina transaccional y se muestra en las figuras para la restricción 1 (izquierda) y para la 2 (derecha) obtenido graficando en ordenadas el valor de la función objetivo (Z) y en abscisas los valores de b_1 (izquierda) y de b_2 (derecha).





Capítulo 3.

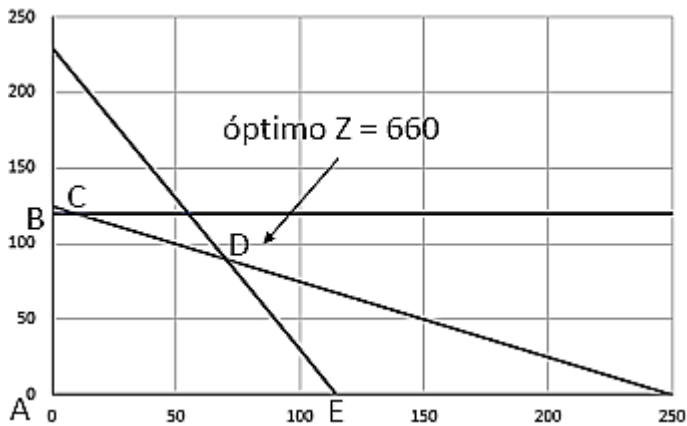
Programación Lineal.

Algoritmo Simplex

Dantzig

En los capítulos anteriores hemos abordado el caso de Alcoholes Argentinos desarrollando el método gráfico. Así, aprendimos a obtener el gráfico y los valores de sus parámetros que nos permiten tomar decisiones operativas. Ahora aprenderemos a utilizar un algoritmo que, además, nos permitirá trabajar cómodamente con más variables de decisión

Comenzaremos recordando la solución a la que habíamos arribado, en el caso de los alcoholes, mediante el método gráfico.



Vértice	x_1	x_2	Funcional
A	0	0	0
B	0	120	600
C	10	120	630
D	70	90	660
E	115	0	345

← Es el vértice que corresponde al máximo: Optimo

Para llegar a esta solución óptima hay dos alternativas:

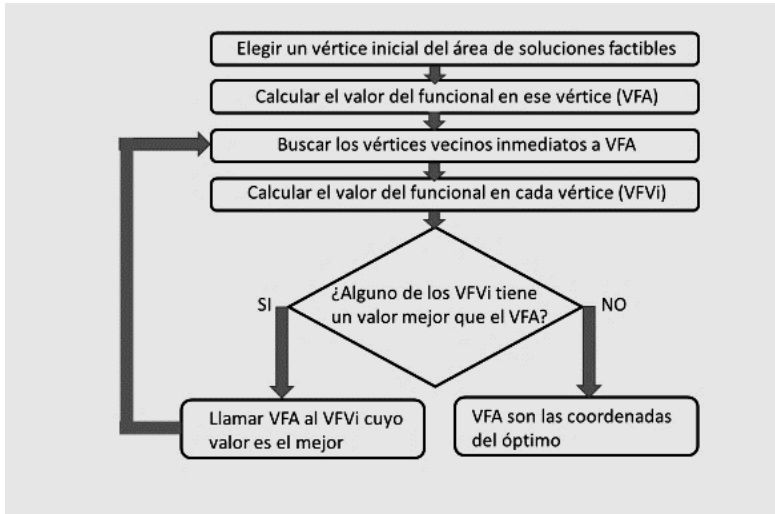
Trazar sucesivas rectas que representen el funcional hasta dar con la que pasa por un punto extremo y que simultáneamente brinda el máximo valor de Z. Esta alternativa no podría realizarse si se tuvieran más de tres variables.

Enumerar los puntos extremos del área de soluciones factibles y hallar el valor de x_1 y de x_2 para cada uno de ellos, calculando luego el valor de la función objetivo en cada punto y seleccionando el valor máximo encontrado (como se ve en la Tabla de la página anterior)

La segunda alternativa puede describirse de manera genérica desarrollándola como un algoritmo que permita examinar cada uno de los puntos extremos (vértices) del área de soluciones factibles:

- Determinar un punto inicial para el análisis.
- Calcular del valor del funcional en ese punto.
- Examinar los puntos vecinos inmediatos y calcular el funcional en cada uno de ellos.

- ¿Existe un valor mejor en alguno de ellos? Si la respuesta es SI, reemplazar ese punto por el actual e ir al paso 3. Si la respuesta es NO el punto actual es la solución óptima.



Este algoritmo se puede aplicar sólo si el problema es maximizante y las restricciones se plantean en su condición de igualdad. Lo generalizamos diciendo que consideramos que la forma normal de presentación del algoritmo es aquella en que:

- Los valores del lado derecho de las restricciones son no negativos
- Las restricciones son igualdades
- Las variables son no negativas

Los problemas deberían, entonces, ser convertidos a la forma normal equivalente, teniendo en cuenta que todo lo que pueda pertenecer a una forma pertenecerá a la forma equivalente (solución, factibilidad, cotas, etc.)

Conversión a la forma normalizada

Desigualdades del Tipo I

Las restricciones del tipo \leq (las llamaremos Tipo I) serán convertidas en igualdades mediante el artificio de crear una nueva variable, llamada, indistintamente, "**variable**

de ajuste", "**variable de exceso**" o "**variable slack**", que se interpreta como "lo que falta para llegar al criterio". Así, la restricción 1 original:

$$2 x_1 + x_2 \leq 230$$

Se convierte en igualdad:

$$2 x_1 + x_2 + S_1 = 230$$

En la cual, S_1 asumirá el valor necesario para que la ecuación se iguale a 230 para cada uno de los valores *permitidos* que se asignen a x_1 y x_2 .

Cuando decimos "valores permitidos" es para señalar que esto es válido siempre que se cumpla con la condición de que las variables (x_1 , x_2 y ahora la nueva S_1) sean no negativas.

Desigualdades del Tipo II

En el caso que las desigualdades sean del tipo $[\geq]$ (las llamaremos Tipo II) se crean dos nuevas variables, primero la de ajuste, que ahora significa "lo que sobra del criterio", por ejemplo, una restricción hipotética:

$$7 x_1 + 4 x_2 \geq 57$$

Si se convierte en igualdad con la variable *slack* correspondiente, quedaría así:

$$7 x_1 + 4 x_2 = 57 + S_1$$

$$7 x_1 + 4 x_2 - S_1 = 57$$

Pero en este caso, cuando las variables de decisión se igualen a cero, S_1 pasaría a ser negativa, con lo cual no se cumple la condición de no negatividad.

Para evitar que esto ocurra, se crea una nueva variable, llamada **variable artificial**, destinada a asumir un valor ficticio solamente en caso de que S_1 sea nula (porque no puede ser menor que cero):

$$7 x_1 + 4 x_2 - S_1 + A_1 = 57$$

Observe que A_1 no tiene sentido físico (por eso se denomina artificial) y asume un valor (57) solamente cuando x_1 y x_2 son nulas, lo que lleva a que, solo en ese caso, S_1 también lo sea, para evitar ser negativa.

Adecuación del funcional

Cada una de las variables *slacks* introducidas debe evaluarse en el funcional. En el caso de las variables de ajuste, éstas no afectan al criterio, por lo tanto, se incorporan a la función objetivo con un coeficiente nulo: sea cual fuere el valor que estas variables

asuman, no interfieren en el criterio. (NOTA MUY IMPORTANTE: esto no es válido para las variables artificiales)

Por ejemplo, en el problema de los alcoholes, en el punto “A” de la solución gráfica, las variables de decisión son nulas (no se fabrica nada), por lo tanto, $S_1 = 230$, $S_2 = 250$ y $S_3 = 120$. (Literalmente, sobran todos los recursos). Sin embargo, el valor de Z sigue siendo cero, porque Z es función de la cantidad de cada tipo fabricada y no de los recursos “no utilizados”.

En el caso de las variables artificiales, como dijimos que éstas no tienen sentido físico, buscaremos que afecten el funcional en forma tal que — según el criterio establecido — se conviertan en indeseables. Eso se logra asignándoles un coeficiente incompatible con el criterio. Así, si el problema es de maximización, les adosaremos un coeficiente muy chico, negativo, que las haga indeseables ya que, cualquier valor que asuma la variable, multiplicado por un número muy negativo no podrá ser tenido en cuenta para buscar valores del funcional altos y, por lo tanto, esa variable artificial difícilmente forme parte de una solución en la cual cada variable debe contribuir a maximizar ganancias y, por lo tanto no será tenida en cuenta. Si es de minimización, el coeficiente, al contrario, deberá ser muy grande.

Seguimos con el problema de los alcoholes, ahora con el modelo en la forma normalizada. Se incorporaron tres variables *slacks*, una para cada restricción con los correspondientes coeficientes, que son solamente ceros, en donde la variable *slack* no está involucrada, o unos, donde sí lo está:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \equiv \max$$

sujeto a :

$$2x_1 + 1x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 230$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 250$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 120$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0$$

$$s_2 \geq 0$$

$$s_3 \geq 0$$

Conversión del algoritmo en forma geométrica a la forma algebraica

El primer paso consiste en calcular cada vértice (concepto geométrico) del área factible (que también es un concepto geométrico) mediante procedimientos algebraicos. El concepto algebraico equivalente del vértice se denominará solución factible básica (**sfb**) y no es otra cosa, como ya fue visto, que **la raíz del sistema de ecuaciones que determina ese vértice**. Ese sistema de ecuaciones se construye con todas las restricciones llevadas a igualdad que forman el vértice.

En este caso, el área de soluciones factibles y los vértices se muestran en la primera figura de este capítulo. Recordemos que se acepta que, de los infinitos puntos factibles, la solución óptima debería encontrarse en un vértice, por lo tanto, estos vértices son puntos importantes.

Para identificar cada una de las **sfb** comenzaremos observando que hay más variables que ecuaciones: Existen, en este caso, tres ecuaciones (las que provienen de igualar las inecuaciones de la restricción 1, la restricción 2 y la restricción 3) y cinco variables (x_1 , x_2 , s_1 , s_2 y s_3). La diferencia entre ecuaciones y variables es 2, de ahí que se puede asignar un valor arbitrario a dos variables cualquiera y hallar la raíz del sistema de ecuaciones resultante. Por ejemplo, si se asigna un valor cualquiera, $x_1 = 20$ y $x_2 = 40$ se tiene una raíz con los valores para las restantes variables dados por:

$$\begin{array}{ll} 2 \times 20 + 40 + s_1 = 230 & \rightarrow s_1 = 150 \\ 20 + 2 \times 40 + s_2 = 250 & \rightarrow s_2 = 150 \\ 0 + 40 + s_3 = 120 & \rightarrow s_3 = 80 \end{array}$$

Generalizando, si un programa lineal normalizado tiene n variables y m ecuaciones con $n > m$ se podrá construir una solución eligiendo valores arbitrarios para la diferencia entre n y m ($n - m$) de las variables y utilizando las m ecuaciones con m incógnitas para encontrar los valores de las restantes variables.

Entonces, para construir una **sfb** comenzaremos por elegir $n - m$ variables, en este caso serán 2 (n° de variables - n° de ecuaciones: $5 - 3 = 2$).

Elas serán el conjunto de las variables que de ahora en adelante denominaremos **variables no básicas** a las que siempre se les asignará el valor de **ceros**, resolviéndose el sistema de ecuaciones remanente para hallar el valor de las restantes variables, (a las que llamaremos **variables básicas**) Este procedimiento lo haremos hasta haber

asignado un cero a todos los pares posibles de variables y, en cada oportunidad, encontrado el valor de las restantes.

El número de variables **NO BÁSICAS** resulta de la diferencia entre el número de variables y el número de restricciones.

Cualquier variable **NO BÁSICA** es nula.

Por ejemplo, si igualamos s_2 y s_3 a cero, buscaremos los valores de las restantes variables x_1 , x_2 y s_1 , usando el sistema de ecuaciones...

$$2x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 230$$

$$x_1 + 2x_2 + 0s_1 = 250$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0s_1 = 120$$

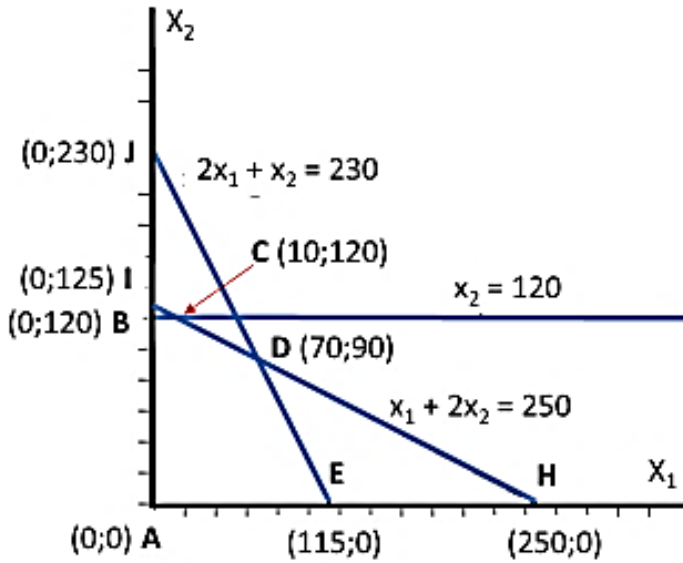
En el que resulta

$$x_1 = 10, x_2 = 120 \text{ y } s_1 = 90$$

Como hay varios pares posibles para seleccionar variables *no básicas* y calcular las correspondientes *básicas*, calcularemos todas ellas y tabularemos los resultados, indicando además en la columna llamada SFB si el par hallado corresponde o no al área de soluciones factibles:

Vértice	Variables					F Obj Z	SFB?
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
A	0	0	230	250	120	0	SI
B	0	120	110	10	0	600	
C	10	120	90	0	0	630	
D	70	90	0	0	30	660	
E	115	0	0	135	120	345	
H	250	0	-270	0	120	750	NO
I	0	125	105	0	-5	625	
J	0	230	0	-210	-110	1150	

Como se puede ver, cada solución factible básica corresponde a uno de los vértices de la solución gráfica



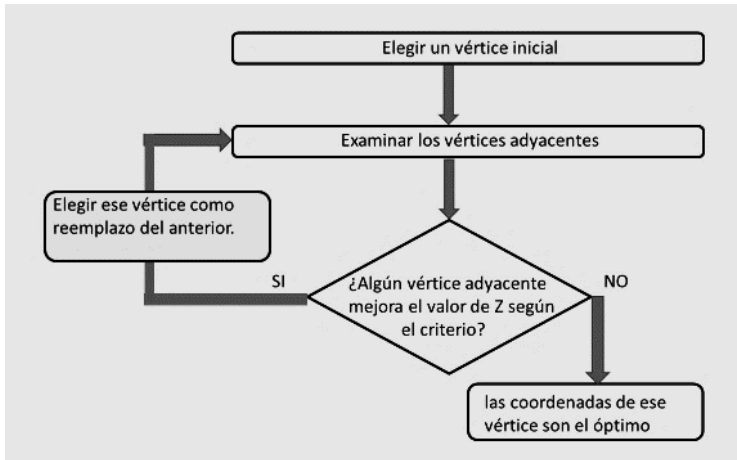
Este método requiere examinar todas las soluciones factibles básicas hasta encontrar la mejor, de la misma manera que en el modo gráfico había que examinar cada uno de los vértices. Obviamente se presenta una labor grande y complicada en caso de problemas con números altos de variables y de restricciones. Ya hemos señalado que, al tener m restricciones de igualdad y n variables, para buscar cada una de las soluciones básicas hay que elegir $n - m$ variables no básicas cuyos valores se toman como cero, quedando la cantidad m representando a las variables básicas cuyos valores se encuentran resolviendo m ecuaciones con m incógnitas, por lo tanto, si queremos, por ejemplo, abordar un caso en el cual,

$$m = 10 \text{ restricciones y } n = 20 \text{ variables}$$

las variables básicas para elegir serán $n - m = 20 - 10 = 10$ quedarán 10 ecuaciones con 10 incógnitas a resolver. El número de soluciones básicas será

$$\frac{n!}{(n - m)!m!} = \frac{20!}{10! \times 10!} = 184756$$

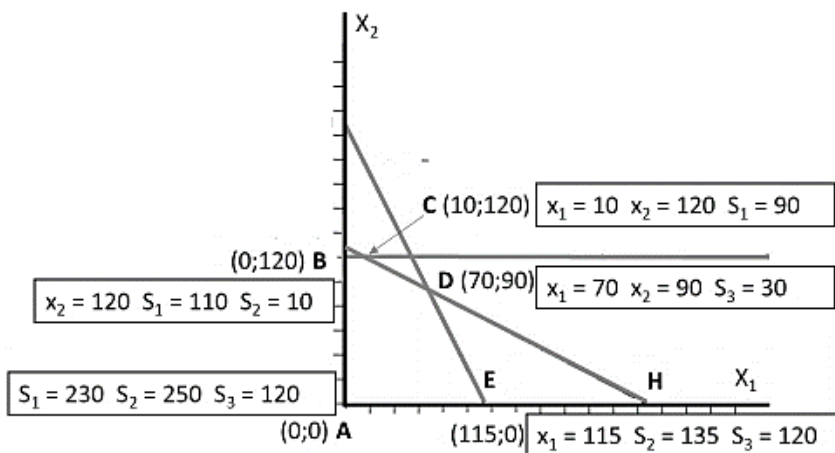
Como se ve, es un número grande de soluciones a analizar, aunque finito. El algoritmo geométrico para examinar esas soluciones finitas podrá ser el siguiente:



La conversión a algoritmo algebraico es la siguiente:

- 1. INICIO**
- 2. COMPROBACIÓN DE ÓPTIMO**

Volviendo al gráfico, incorporamos ahora, además de las coordenadas de cada uno de los vértices de la superficie de respuesta, los valores que en ese punto asumen las variables básicas (que aparecen en un recuadro). Podemos situarnos en cualquier vértice y tratar de efectuar un “*traslado*” a un vértice vecino:



Por ejemplo, para ir del vértice A al B, hubo que cambiar una variable básica (s_3) por una no básica (x_2)

Para ir de A a C salió s_2 de las básicas e ingresó en su lugar x_1 .

Para ir de C a D, sale s_1 e ingresa a la base s_3 , nuevamente

Cerrando el ciclo, de D a E sale x_2 e ingresa s_2 .

Como se ve, si nos situamos en un vértice dado cualquiera, (al que llamaremos vértice actual), el examinar vértices adyacentes implica cambiar una variable. En cada vértice todas las variables no básicas valen cero, para convertir esa variable en básica debe cambiarse el cero por un valor positivo.

Sin embargo, resulta muy costoso examinar cada uno de los vértices adyacentes, ya que si hay m restricciones y n variables van a existir $m - n$ vértices factibles adyacentes para cada vértice con solución factible (que es el número de variables no básicas). Para examinar estos vértices hay que cambiar el valor de una básica dejando las demás variables fijas, registrar el valor y examinar otra, hasta encontrar aquella que cumple el requisito.

Como una alternativa que disminuya ese número de puntos a evaluar, se dispone de un método para examinar los vértices adyacentes. Se parte definiendo una expresión que cuantifica los cambios llamándolos **costos de cambio** o **costos reducidos** o **costos de oportunidad**, cuya definición es

Costo de oportunidad es el cambio en el valor de la función objetivo por unidad de aumento de la variable no básica. En otros términos: en qué medida mejoraría Z si se decide introducir en la base la variable no básica examinada y, por lo tanto, darle un valor diferente al cero que en ese momento tienen por ser NO-BÁSICAS.

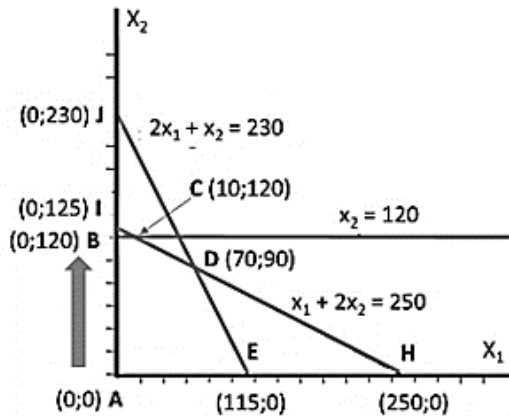
De esta manera, si el costo de oportunidad es positivo, significa que la función objetivo será mayor cuando la variable no básica pase a la base. Un costo de oportunidad negativo indicará un valor para el funcional menor en las mismas circunstancias.

Significa que, si en un vértice se encuentra que hay al menos una variable no básica que tiene un costo de oportunidad positivo, entonces ese vértice es mejor opción ya que la función objetivo aumentará (recuerde que estamos MAXIMIZANDO) y que, en cambio, si no hay costos de oportunidad positivos (son nulos o negativos) el vértice no nos interesa y no lo examinamos.

Paralelamente, cuando se decide incrementar el valor de la variable no básica haciéndola básica, cada una de las variables de la base comienzan a modificar su valor.

Algunas se decrementarán. Una de ellas será la primera en hacerse nula y, como las variables nulas, por definición, son las no-básicas, entonces esa es la que saldrá de la base dejándole su lugar a la que está entrando.

En el problema de los alcoholes, en el vértice A, hay tres variables básicas: S_1 , S_2 y S_3 y dos variables no básicas o nulas (x_1 y x_2). Significa “no se produce [$x_1=0$ y $x_2=0$] y sobran todos los recursos [$S_1=230$; $S_2=250$ y $S_3=120$]”.



Ahora se decide producir algo y solamente se observa la función objetivo: allí se ve que el mayor cambio en la ganancia es producir x_2 , ya que el Z aumenta en 5 \$ por unidad fabricada (el costo de oportunidad, como veremos más adelante, es de 5). La decisión es ingresar x_2 a la base. Pero, cuando se comienza a fabricar también comienzan a gastarse los recursos disponibles. ¿cuál se gastará primero? (¿Cuál recurso se hará cero primero?)

El valor que primero se alcanza es $x_2 = 120$ (después sigue 125 y 230). Por tanto, será S_3 la primera variable básica que se haga nula: no sobra nada del recurso “demanda del alcohol 2” (se hizo cero la capacidad de compra del mercado)

Tenemos ahora fundamentos para replantear el paso 2 del algoritmo, agregándole estos dos puntos

2.1–Calcular el costo reducido de cada variable no básica

2.2–Si todos los costos reducidos son ≤ 0 entonces el vértice actual es el óptimo. Caso contrario ir al paso 3.

3. CAMBIO DE VÉRTICE

Si bien es cierto que puede elegirse cualquier variable no básica con costo reducido positivo, en general se utiliza aquella que tiene el costo reducido más grande (pendiente mayor).

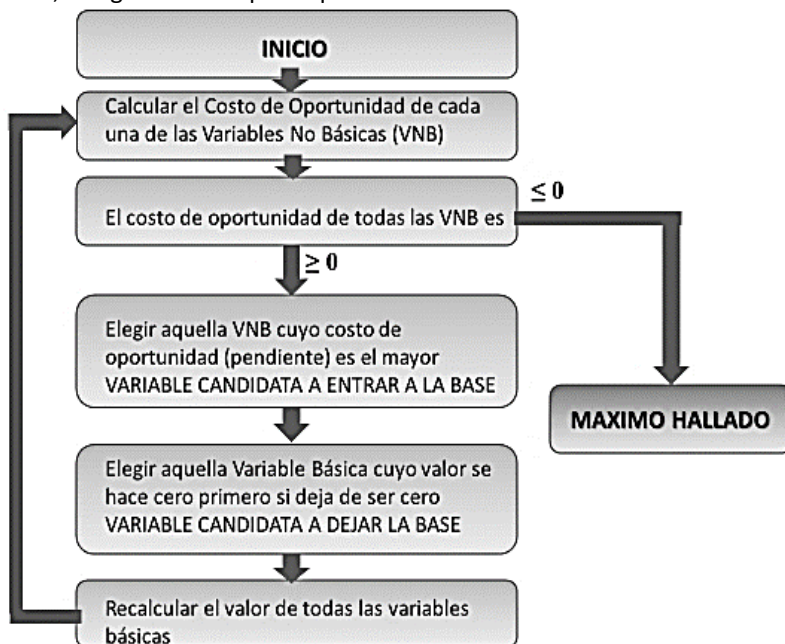
3.1–Con la regla de la pendiente mayor, seleccionar la variable a ingresar a la base.

3.2-Identificar la variable que sale de la base (o valor básico que más rápidamente se hará nulo cuando la variable a ingresar comience a incrementar su valor desde cero)

3.3-Crear una nueva solución factible intercambiando las variables seleccionadas y recalculando el valor de todas las variables.

3.4-Ir al paso 2

En resumen, el algoritmo completo queda así:



INICIO

COMPROBACIÓN DE ÓPTIMO

Calcular el costo reducido o de oportunidad de cada variables no básica

Si todos los costos reducidos son ≤ 0 entonces el vértice actual es el óptimo, ir al paso 4. Caso contrario ir al paso 3.

CAMBIO DE VÉRTICE

Con la regla de la pendiente mayor, seleccionar la variable a ingresar a la base.

Identificar la variable que sale de la base (o valor básico que más rápidamente se hará nulo cuando la variable a ingresar comience a incrementar su valor desde cero)

Crear una nueva solución factible intercambiando las variables seleccionadas y recalculando el valor de todas las variables.

Ir al paso 2

FIN. Presentar las coordenadas del vértice actual como los valores de la solución del problema

Enfoque formal.

Para trabajar en el algoritmo Simplex deberemos convenir la formalidad matemática con la cual nos expresamos.

Para mayor claridad vamos a repasar o repetir algunos conceptos, teniendo en cuenta que los fundamentos matemáticos del método deben buscarse en textos que escapan a los alcances de esta publicación. Particularmente recomendable es conocer el método de Gauss-Jordan para resolver matrices⁵.

Modelo general

La expresión generalizada del modelo es

⁵ La **eliminación Gaussiana** o **eliminación de Gauss-Jordan**, llamada así debido a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Wilhem Jordan (1842 - 1899) es un algoritmo de álgebra para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, encontrar matrices e inversas. Cuando se aplica este proceso, la matriz resultante se conoce como: "forma escalonada".

Optimizar

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq \geq b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq \geq b_m \end{aligned}$$

con $x_j \geq 0 \forall j \neq 0$

O, alternativamente

Optimizar

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \geq b_i$$

con $x_j \geq 0 \forall j \neq 0$

O, en forma matricial

Optimizar $z = \mathbf{c}x$

Sujeto a: $\mathbf{A}x \leq \geq \mathbf{b}$ para $x \geq 0$, donde \mathbf{A} es una matriz de $m \times n$

Compendio de la Terminología utilizada

Variable de decisión: Conjunto de variables cuya magnitud se desea determinar (x_j). En todo modelo hay n variables de decisión que forman un vector fila.

Restricciones: Conjunto de desigualdades limitantes de los valores de x_j . En todo modelo hay m restricciones.

Función Objetivo. Funcional. (Z) es la función matemática que expresa la relación de variables a optimizar (política) y señala el criterio (objetivo) con el cual se enunció la política.

Criterio: objetivo del modelo propuesto

Condición de linealidad: Se expresa para las funciones matemáticas que intervienen en el problema.

Tipo de restricción. Desigualdades o igualdades limitantes: (\leq , \geq o $=$). Se suelen denominar Tipo I o Fáciles a aquellas de menor-igual (\leq) y Tipo II o Difíciles a las otras dos.

Condición de no negatividad: todas las variables de decisión deben ser no negativas ($x_j \geq 0$)

Vector de coeficientes del funcional: es el vector construido con el renglón c_j

$$c_j = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

La longitud del vector es coincidente con la del de variables de decisión (n)

Vector de disponibilidades (recursos): es el vector columna b , b_i .[b_1, b_2, \dots, b_n]
También se llama vector de términos independientes, o vector de valores del lado derecho. Longitud coincidente con el número de restricciones (m)

$$b = \parallel b_i \parallel = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes tecnológicos: es la matriz de los términos a_{ij} :

$$A = \parallel a_{ij} \parallel = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El tamaño de A es de $n \times m$. (número de variables \times número de restricciones)

Solución Factible: valores de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones

Solución óptima: Solución factible que optimiza el funcional (alcanza el objetivo, satisface el criterio).

Desarrollo del método Simplex – Dantzig

Como ya fue señalado, el algoritmo Simplex, creado por el matemático norteamericano George Bernard Dantzig en 1947, es una técnica popular para dar soluciones numéricas del problema de la programación lineal. Para discutir el algoritmo vamos a emplearlo en el problema de Alcoholes.

El primer paso es el planteo del modelo en la forma normalizada ya vista, agregando todas las variables de ajuste y artificiales que sean necesarias.

Optimizar

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \equiv \text{Max}$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 1x_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 \leq 230$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 \leq 250$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 \leq 120$$

con x_j y $S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Con todos los elementos de la forma normalizada construiremos la primera tabla del Simplex, la que será, directamente, la primera solución o solución trivial a la que llamaremos "Tabla 1" [T1].

T1		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	230	2	1	1	0	0	
0	S_2	250	1	2	0	1	0	
0	S_3	120	0	1	0	0	1	
	Z_j							
	$C_j - Z_j$							

Hemos tabulado los coeficientes del funcional (c_j) en la primera fila e incorporamos dos matrices, la matriz de coeficientes tecnológicos (a_{ij}) y una matriz unidad que surge de haber incorporado las variables de ajuste (S_j) en el proceso de "normalización".

Esta *matriz unidad* es la que determina como es la base (La Base es las columnas de coeficientes [c_k] y de variables [X_k]). Se procede así: cada uno de los elementos "1" de la matriz unitaria señala que la variable (X_k) y su coeficiente (C_k) (que están a la izquierda del "1") tiene *identidad* con la variable X_j y el coeficiente c_j del encabezado (que está encima del "1").

Se escriben en la base (lado izquierdo) copiados de lo que se lee en el encabezado (arriba) de esa columna.

En esta primera tabla, el vector columna B está completado por los valores del lado derecho que, simultáneamente, son los valores que asumen las variables básicas, como ya fue visto.

Por lo tanto, esta primera tabla ya es **una solución al problema**, ya que en ella se encuentran el valor que asumen todas y cada una de las variables satisfaciendo todos los requisitos del modelo:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; s_1 = 230; s_2 = 250 \text{ y } s_3 = 120 \text{ y un valor del funcional } Z = 0.$$

Este vértice representa la decisión de no fabricar nada y por ello sobran todos los recursos.

La evolución del algoritmo a partir de esta primera solución, que denominamos “solución trivial”, se basa en determinar si hay posibilidad de que, al incorporar una variable no básica a la base, se mejore el valor de Z en el sentido del criterio fijado (maximizar, en este ejemplo).

Incorporar una variable no básica a la base, en este caso, significa – físicamente – comenzar a fabricar “algo” de uno de los dos alcoholes. (las variables no básicas son dos: x_1 y x_2 y ambas valen cero, significa no fabricamos nada).

Esto significa explorar los vértices adyacentes para verificar si alguno mejora la situación. Si hay más de uno se optará por el que más aumento del funcional brinde.

Para ello, primero se averigua cual es la contribución de las variables básicas a cada una de las variables del problema y a Z.

En el renglón Z_j , debajo de cada variable se evalúa la contribución de esa variable en el valor del funcional en interacción con las variables básicas. Así, en esa fila, aparece en la primera columna, B, el cálculo del funcional: la suma de los productos de cada uno de los coeficientes de las variables básicas (c_k) con el valor que éstas asumen en la solución hallada (b_k). (Las no básicas no contribuyen, su valor siempre es cero).

$$Z_B = \sum_{k=1}^m c_k x_k$$

Hecho este cálculo, se va a completar el renglón Z_j de la primera tabla haciendo la suma de los productos $c_k * a_{ij}$ para cada j constante. Calcularemos

$$230 \times 0 + 250 \times 0 + 120 \times 0 = 0 \text{ en la columna B}$$

$$2 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \text{ en la columna } X_1 \text{ y así sucesivamente.}$$

T1		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	230	2	1	1	0	0	
0	S_2	250	1	2	0	1	0	
0	S_3	120	0	1	0	0	1	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$							

El significado de esta fila Z_j es importante y se ve más detalladamente más adelante, en la última tabla. Sin embargo, señalaremos que el cero que aparece en la columna “B” indica el valor del funcional en este vértice (o solución). Sabíamos que debía ser así,

porque al ser la **solución trivial** no se está produciendo nada de x_1 y x_2 y, por tanto, no tendremos ganancias.

El cero en la columna " X_1 " indica cuánto aporta en este vértice una unidad de X_1 . Obviamente no aporta nada, pues el resultado es cero: el aporte de X_1 a la solución cero es cero. Lo mismo que X_2 . Sin embargo, el aporte de S_1 , S_2 y S_3 , que están en la base, que podría ser numérico, aunque, obviamente también es cero ya los recursos sobrantes no aportan a la ganancia de producción. Se volverá sobre el tema, porque esto que es válido en este caso podría no serlo en otros problemas o soluciones en las cuales sea necesario que sobre un recurso para mejorar Z , en cuyo caso, ese recurso aportará a la ganancia (o a Z en términos más generales)

Costo de oportunidad

El siguiente paso será construir y evaluar el vector (fila) rotulado $c_j - Z_j$ que denominaremos **vector de costos de oportunidad**. Este permite determinar el cambio que se registraría en el funcional por la incorporación de una unidad para cada una de las variables no básicas. Examina la solución hallada con una posible nueva solución que se obtendría incorporando la variable que encabeza cada columna.

El razonamiento es: "*estamos produciendo esto (en este caso, nada), ¿qué pasaría si producimos una unidad de X_1 o una de X_2 ? (las dos que hasta ahora no están en la base)*"

Por ejemplo, si se decidiera incorporar la variable X_1 , ya sabemos que por cada mil litros de alcohol Tipo 1 que se fabrican se obtienen 3 \$. Este valor se compara con el obtenido al encontrar la diferencia $c_j - Z_j$ que, para esta columna donde $j = 1$, corresponde a: $3 - 0 = 3$.

Esto se traduce en estos términos: si en vez de la solución actual (en este caso: no fabricar nada) se decidiera fabricar alcohol tipo 1, se ganarían 3 \$ por cada unidad fabricada por encima de la situación actual (0) (o, si nos gusta ser pesimistas, se perderían 3 \$ por cada unidad menos que se fabrique, pero no es aplicable en esta situación).

Este valor es el "*costo de oportunidad de fabricar X_1* ". Si el valor fuera nulo, se debería a que está ya en la base (que no es el caso) o que no interesa fabricarlo, si fuera negativo significaría que que, si se fabricara, se perderían ganancias.

La tabla se completa con los costos de oportunidad calculados para cada variable. Obsérvese que el costo de oportunidad de las variables que hasta este momento ya están en la base es cero, por lo tanto, inferimos que los costos de oportunidad significativos son aquellos que corresponden a las variables que están en las columnas de la matriz de coeficientes tecnológicos, ya que se evalúa la oportunidad de incluir otra variable en la base.

Los costos de oportunidad de las variables básicas siempre son nulos.

Lo siguiente será evaluar todos los costos de oportunidad. Si hay valores positivos en este caso de maximización (negativos en caso de minimización) significa que hay soluciones que pueden mejorar a la encontrada. Si todos son nulos o menores que cero, es que no hay mejora posible y la solución hallada es la óptima.

T1		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	230	2	1	1	0	0	
0	S_2	250	1	2	0	1	0	
0	S_3	120	0	1	0	0	1	
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		3	5	0	0	0	

Como en este caso aparecen 3 y 5, es evidente que hay soluciones mejores, y que si se incorpora X_2 a la base se obtienen 5 \$ por unidad, mientras que X_1 da \$3. En términos prácticos, como ya fue dicho, se tomaría también la misma decisión: se fabricará alcohol 2, que es el que más ganancia da.

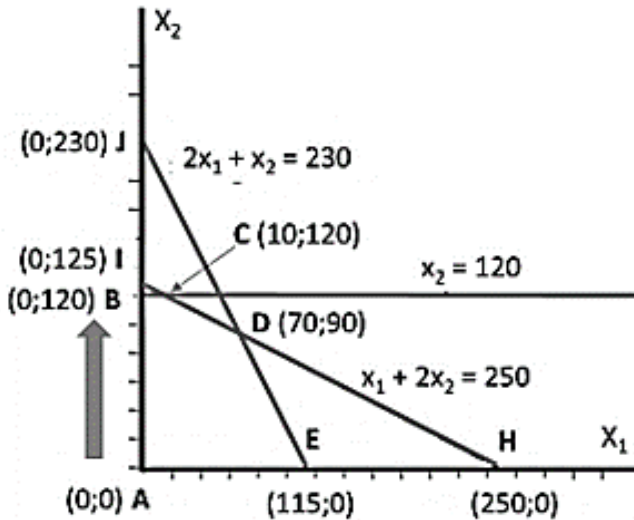
Se ha determinado, entonces, que la candidata a entrar en la base es X_2 , ya que se obtendrá 5\$ por unidad de fabricación. Ahora: si se comienza a fabricar x_1 se comienzan a gastar recursos y disminuyen los sobrantes S_j , entonces, ¿Cuántas unidades se deben fabricar antes que alguno de esos “sobrantes” se acabe (se haga igual a cero)?

Es equivalente a preguntarse *¿Qué variable se debe sacar de la base (hacer igual a cero) para que la candidata (actualmente cero) “entre a la base” (se haga distinta de cero)?*

O, en otros términos, cuánto puede crecer el valor de X_2 antes de que se haga nulo el valor de una de las variables S_1, S_2 o S_3 (en términos físicos y concretos: ¿Cuánto puedo fabricar de ese alcohol hasta que se me acaben los recursos? ¿Qué recurso es el limitante (se acaba primero)?

Recordemos la solución gráfica hallada en el capítulo anterior. La solución actual (trivial) está en el vértice A. Se ha decidido evolucionar hasta el B, pero ¿hasta dónde se puede

ir? ¿Qué cantidad de X_2 se puede fabricar? Es evidente – viendo el gráfico – que solo se podrá avanzar hasta llegar al límite impuesto por la restricción de demanda ($X_2 = 120$). El segundo recurso a “agotar” estaría en la zona “prohibida” del gráfico (0; 125) y el tercero en el punto (0; 230).



Observamos que también podríamos haber optado por “ir” al punto E, pero con un costo de oportunidad menor, 3.

Volviendo a los términos analíticos, al determinarse la candidata a entrar a la base, deberá averiguarse como se afectan los recursos cuando se toma la decisión de fabricar X_2 y cuál de ellos se agota primero (en la figura, es evidente que el recurso demanda de X_2 es limitante). Para verlo en la tabla, en la columna Φ_k se colocan los valores de la tasa de “agotamiento” de la solución en función de la utilización de una nueva variable, que antes se había fijado en cero:

$$\Phi_k = b_k / a_{hk}$$

- donde k es el nombre de la fila que contiene la variable analizada (la que podría llegar a salir)
- h es el nombre de la columna que contiene la variable candidata a entrar a la base.
- Se opta la de menor valor Φ_k , que será el recurso que primero se agota.

T1		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	230	2	1	1	0	0	$230/1=230$
0	S_2	250	1	2	0	1	0	$250/2=125$
0	S_3	120	0	1	0	0	1	$120/1=120$
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		3	5	0	0	0	

Lo interpretamos de la siguiente manera: Si se decidiera comenzar a fabricar X_2 se obtendría una ganancia de 5\$ por unidad de producción y se podría producir hasta que se agote el recurso asociado a S_3 (Recurso limitante). En este caso: si se decide fabricar X_2 se podrá hacer hasta saturar la capacidad de demanda del mercado para el alcohol 2 (Fabricar todo lo que se puede vender).

Se tiene entonces, una candidata a entrar (X_2) y una a salir (S_3). La celda intersección de la fila de la variable “que sale de la base” y la columna de la que “entra a la base” se denomina “punto pivote”.

T1		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	230	2	1	1	0	0	230
0	S_2	250	1	2	0	1	0	125
0	S_3	120	0	1	0	0	1	120
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		3	5	0	0	0	

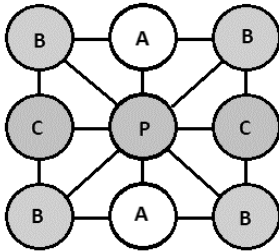
La próxima tabla Simplex, la segunda, será la que describe la siguiente solución, que corresponde al vértice [B] y será construida aplicando la transformación de Gauss – Jordan, trabajando a partir del punto pivote. El procedimiento es así: primero construimos una tabla “en blanco” a la que llamaremos “Tabla 2” [T2]:

T2		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
	z_j							
	$C_j - Z_j$							

La fila del punto pivote de la tabla 1 se transcribe a la nueva tabla 2 copiando cada elemento de la vieja tabla dividido por el valor del punto pivote (en el caso del ejemplo, todos los elementos se dividen por uno)

Cada celda a_{ij} restante se transforma de la siguiente manera:

$$B' = B - \frac{AC}{P}$$



donde B' es el nuevo valor de a_{ij} en la tabla en construcción, B es el valor en la tabla original y A y C son los elementos ortogonales de B y P , también en la original. Un caso particular es el vector columna de la entrante, en el cual $P = C$ y $A = B$, lo que asegura que ese vector se completa con ceros, excepto el elemento donde estaba el pivote, que pasa a ser uno, constituyendo así una parte de la matriz unidad.

Por último, falta incluir el nombre de las variables básicas (X_k y su correspondiente coeficiente c_k), para lo cual se seguirá el criterio inicial:

- identificar la matriz unidad
- para cada columna colocar en el x_k de la fila donde está el uno, el nombre de la columna donde está ese mismo uno

Como resultado, la tabla 2 terminada, será:

T2		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	110	2	0	1	0	-1	110/2=55
0	S_2	10	1	0	0	1	-2	10/1=10
5	X_2	120	0	1	0	0	1	120/0=M
	z_j	600	0	5	0	0	5	
	$C_j - Z_j$		3	0	0	0	-5	

El nuevo punto pivote corresponde al ingreso de X_1 y la salida de S_2 . Otra vez es un uno. Esta solución corresponde a la ganancia (600) obtenida al producir según las coordenadas del punto B. El algoritmo, ahora, propone evolucionar hasta el punto C (fabricar todo lo que se pueda de X_1 mientras alcancen los recursos y mantener los 120.000 l de X_2).

La tercera tabla será:

T3		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_1	90	0	0	1	-2	3	$90/3=30$
3	X_1	10	1	0	0	1	-2	N/A
5	X_2	120	0	1	0	0	1	$120/1=120$
	z_j	630	3	5	0	3	-1	
	$C_j - Z_j$		0	0	0	-3	1	

Observamos que aún hay costos de oportunidad positivos, por lo cual deberá entrar en la base S_3 y salir S_1 . (Los valores Φ_k negativos no se tienen en cuenta). El punto pivote es ahora el valor 3.

La cuarta tabla será:

T4		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_3	30	0	0	1/3	-2/3	1	
3	X_1	70	1	0	2/3	-1/3	0	
5	X_2	90	0	1	-1/3	2/3	0	
	z_j	660	3	5	0,33	2,33	0	
	$C_j - Z_j$		0	0	-0,33	-2,33	0	

Como en **T4** no hay valores no nulos positivos en el vector de costos de oportunidad, nos damos cuenta de que se trata de la tabla final, y sabemos que hemos hallado el óptimo, que significa que la producción que dará la máxima ganancia será corresponde a los siguientes valores para cada variable

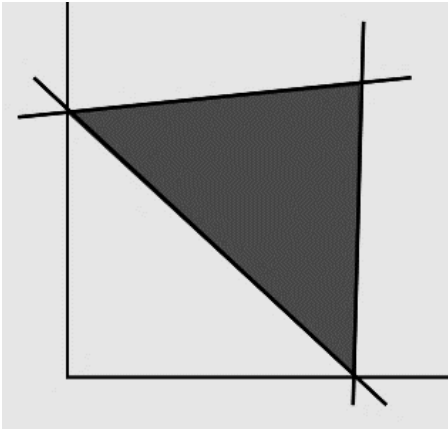
$x_1 = 70$; $x_2 = 90$; $S_3 = 30$ y $Z = 660$ y no habrá sobrantes de mano de obra en los dos sectores (S_1 y S_2 iguales a cero)

Algunas consideraciones para tener en cuenta:

El *Punto pivot* debe ser siempre positivo Si fuera nulo o negativo no puede utilizarse, ya que se trata de un caso donde el funcional crece sin límites

Ninguna de las variables básicas x_k puede ser cero. Para ellas $c_j - Z_j$ es cero. Si hay una variable no básica con $c_j - Z_j = 0$ se está en presencia de una solución alternativa.

Método de las dos fases



Si hay al menos una restricción del tipo \geq (Tipo II) significa que el origen no pertenece al espacio de soluciones posibles. Como la técnica consiste en comenzar a explorar desde el origen (solución trivial) y esto no es una *sfb* se debe recurrir a una división del método en dos fases:

Volviendo al problema de ejemplo, el enunciado decía que lo máximo a producirse de X_2 era 120 unidades. Si ese enunciado se cambia estableciendo que por lo menos se

deben producir 120 unidades, el modelo cambia de la siguiente manera:

Optimizar

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \equiv \text{Max}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 230 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 250 \\ 0x_1 + 1x_2 &\geq 120 \\ \text{con } x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Si buscamos la forma normalizada, vemos que las primeras dos restricciones no se modifican respecto al caso original, pero sí la tercera, porque si queremos incorporar una variable *slack* debería restarse:

$$0x_1 + 1x_2 - S_3 = 120$$

En este caso, cuando $x_2 = 0$ queda $S_3 = -120$, lo cual es incompatible con la restricción $x_j \geq 0$.

Esta incompatibilidad se supera – como ya señalamos – incorporando una nueva variable, llamada **variable artificial**, y cuando se da el caso de que estamos en la solución trivial (en la que tenemos que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $S_3 = 0$), nos queda entonces $A_1 = 120$:

$$0x_1 + 1x_2 - S_3 + A_1 = 120$$

Siendo las dos primeras las variables de decisión, la tercera la variable *slack* y la cuarta y última la variable *artificial*. Cuando $A_1 = 120$ se está en el origen, pero fuera del espacio de soluciones. Cuando $A_1 = 0$ se ha arribado al espacio de soluciones.

Recapitulando:

FASE I. Variables artificiales en la solución (en la Base): significa que la evolución de la solución todavía está fuera del espacio de soluciones.

FASE II. Variables artificiales nulas (fuera de la Base): significa que comenzó la exploración del espacio de soluciones en busca del óptimo.

Se procede siempre con la misma transformada.

En conclusión, según la desigualdad se aplican las siguientes variables:

RESTRICCIÓN	VARIABLES A INCORPORAR
\leq	+ SLACK
\geq	- SLACK + ARTIFICIAL
=	+ ARTIFICIAL

En todo caso estas variables artificiales deberán incorporarse al funcional con un coeficiente que las penalice cuando sean distintas de cero. A este coeficiente se lo llama M , que es un número mucho mayor que cualquier otro coeficiente del modelo, de manera que M afecta totalmente el funcional. También deberá tenerse en cuenta el signo de M en función del criterio:

Si el criterio para Z es maximizante, $M < 0$

Si el criterio para Z es minimizante, $M > 0$

Por lo tanto, el modelo normalizado queda así:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MA_1 \equiv Max$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 1x_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0A_1 \leq 230$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0A_1 \leq 250$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0S_1 + 0S_2 - 1S_3 + 1A_1 \geq 120$$

con x_j y $S_1, S_2, S_3, A_1 \geq 0$

La matriz unidad, ahora, incluye a la variable artificial y en lugar de la *slack* correspondiente a la desigualdad tipo II.

Interpretación de los modelos

Resolver un modelo de programación lineal no significa solamente arribar a los resultados: la tabla de SIMPLEX aporta rica información adicional que permite evaluar

la factibilidad de los valores y conocer la sensibilidad de las variables. La potencia del método reside en la interpretación correcta de los datos encontrados.

Volvamos al ejemplo que seguimos hasta lograr la última tabla (T4) Simplex.

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \equiv \text{Max}$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 1x_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 \leq 230$$

$$1x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 \leq 250$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 \leq 120$$

con x_j y $S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Recordemos que la tabla final (T4) del SIMPLEX es:

T4		$C_j \rightarrow$	3	5	0	0	0	
C_k	X_k	B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Φ_k
0	S_3	30	0	0	1/3	-2/3	1	
3	X_1	70	1	0	2/3	-1/3	0	
5	X_2	90	0	1	-1/3	2/3	0	
	z_j	660	3	5	0,33	2,33	0	
	$C_j - Z_j$		0	0	-0,33	-2,33	0	

que indica que la solución es:

$$x_1 = 70$$

$$x_2 = 90$$

$$S_3 = 30$$

$$S_2 = 0$$

$$S_1 = 0$$

$$Z = 660 \equiv \text{MAX}$$

Lo primero que notamos es la similitud entre el costo de oportunidad de las variables no – básicas (- 0,33 y - 2,33 respectivamente) con el vector de valores Z_j correspondientes (0,33 y 2,33 respectivamente)

Páginas atrás, al resolver la primera tabla, hicimos comentarios sobre lo que implica el vector " Z_j " que ahora ampliamos. Habíamos señalado que cada valor del vector, excepto el que está en la columna "B" es el aporte que la variable hace a la solución, de la siguiente manera:

- X_1 , cuyo valor en el vector Z_j es 3, debe leerse así: La variable X_1 aporta al valor de Z con 3 unidades por cada unidad de X_1 . Como estamos en la tabla final y X_1 está en la base, entonces el aporte de X_1 es 3 unidades por unidad de X_1 multiplicado por las unidades de X_1 , que se leen en la columna “ C_j ”: 70.
- Así $3 \times 70 = 210$.
- X_2 , otra básica, aporta $5 \times 90 = 450$.
- S_3 , la última básica, aporta $0 \times 30 = 0$

Pero ¿qué ocurre con las no – básicas? Como al ser no – básicas su valor es cero y su costo de oportunidad no es nulo, el 0,33 que está en Z_j debajo de S_1 y el 2,33 que está debajo de S_2 debe leerse así: *esta variable* (cualquiera de las dos, por ejemplo, S_1) *no está en la base, pero, sin embargo, contribuye a la formación del valor Z en 0,33 unidades*. Quiere decir que, si se aumentara S_1 en una unidad, Z aumentará en 0,33 unidades y si se disminuyera S_1 en una unidad, Z disminuirá en 0,33 unidades.

La única manera de incrementar S_1 o S_2 en este punto – en esta solución – es que aumenten los recursos relacionados con ellas. Como el valor *actual* de S_1 y el de S_2 es cero (no sobra nada de cada recurso) la interpretación es: si aumenta una unidad el recurso 1, entonces va a sobrar una unidad de ese recurso, lo que provoca que S_1 aumente en uno para mantener la igualdad. Entonces, por lo ya visto, el 0,33 representa el precio sombra del recurso producción y 2,33 el del recurso rectificado.

Ahora bien, si se observa la tabla final, pueden identificarse las dos matrices que se describieron en la primera:

1) **Matriz Unidad:** la que está conformada por las variables básicas.

x_k	x_1	x_2	S_3
S_3	0	0	1
X_1	1	0	0
X_2	0	1	0

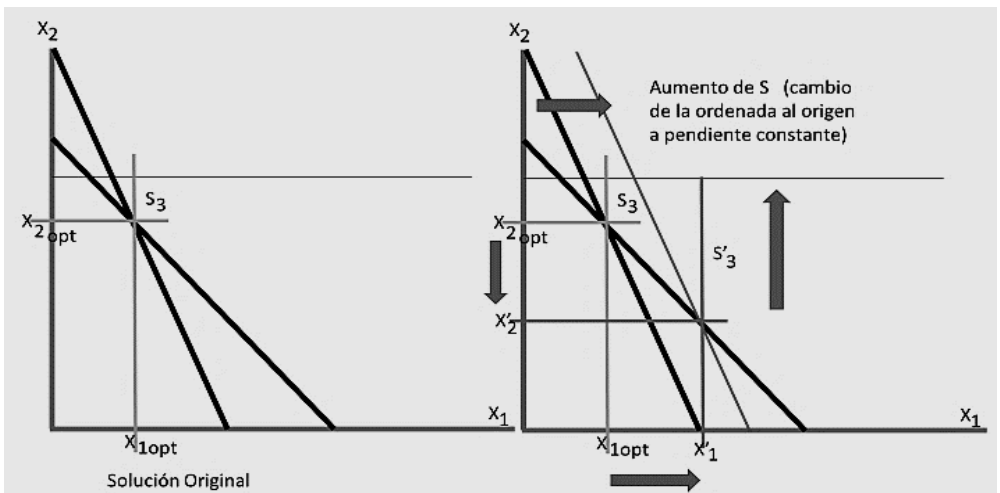
2) **Matriz de coeficientes tecnológicos:** que incluye a las variables no básicas:

x_k	S_1	S_2
S_3	1/3	- 2/3
X_1	2/3	- 1/3
X_2	- 1/3	2/3

Si en particular observamos el vector que representa la variable S_1 para el recurso producción, encontraremos que a x_1 le corresponde un valor de 2/3. Esto indica que, si aumenta en una unidad el recurso de producción, PARA MANTENER LA SOLUCIÓN, deberá aumentar en 0,67 unidades la producción de x_1 . $70 + 0,67 = 70,67$ que serán las

unidades de x_1 producidas mientras que x_2 deberá BAJAR su producción pues la relación entre x_2 y s_1 es negativa ($90 - 0,33 = 89,67$), y además el recurso sobrante de demanda (s_3) deberá aumentar ($30 + 0,3333 = 30,3333$) (Vea el gráfico y analice estos comentarios).

En la figura que sigue, se muestra como la restricción correspondiente al recurso disponibilidad de horas hombre en el sector de producción se desplaza (en rojo) porque aumentan las horas disponibles.



Las horas hombre para producción serán, entonces:

$$0,8 \times 500 + 1 \times 130,5 = 530,5$$

$$600 - 530,5 = 69,5 \rightarrow x_3 = 69,5 \rightarrow \Delta x_3 = -0,5.$$

Finalmente, el conjunto de soluciones queda:

$$x'_1 = 70,67$$

$$x'_2 = 89,67$$

$$s'_3 = 30,33$$

$$s'_1 = 1$$

$$s'_2 = 0$$

$$Z' = 3 \times 70,67 + 5 \times 89,67 = 660,33$$

siendo el valor original de $Z = 660$ se calcula

$$\Delta Z = Z - Z' = 660 - 660,33 = -0,33$$

Si observamos la fila $c_j - Z_j$ en la columna S_1 el valor que figura es $-0,33$.

Por lo tanto, el valor $c_j - Z_j$ representa el valor en que se modifica el funcional por unidad de variación de la variable.

Análisis de Sensibilidad o Análisis Post Óptimo

El análisis de sensibilidad analítico, igual que el gráfico ya visto, tiene como objetivo analizar la estabilidad cualitativa de la solución hallada. Para eso se parte de la última matriz del Simplex.

Límites de variación de los términos independientes.

Se trata de conocer cuáles son los valores extremos entre los cuales pueden variar las disponibilidades sin que la solución óptima deje de ser estable.

Este análisis puede ser hecho sobre el vector que representan las variables *slacks*, dado que éstas, a su vez, están relacionadas cada una con un recurso, y representan las cantidades no cubiertas (o sobrantes) de ese recurso.

Ocurre, entonces, que en la tabla Simplex final se encuentra cada una de estas variables en una de dos situaciones posibles: que la *slack* esté o no en la solución.

a) La variable *slack* ESTÁ en la solución

Es el caso $S_3 = 30$. Esta variable está relacionada con el recurso demanda: nos dice que sobran 30000 litros de alcohol 2 respecto a lo necesario para cubrir la demanda máxima. Significa que se utilizan

$$b_1 - 30 = 120 - 30 = 90 \text{ kl}$$

del recurso "máxima demanda de alcohol 2"

Obviamente la posibilidad de contar con más demanda de alcohol 2 en cualquier valor por encima de 120 no alterará la solución, porque ese recurso no altera ni restringe el modelo: la variable no está saturada.

$$\begin{aligned} b_i - x_2 &\leq b_k \leq \infty \\ 120 - 30 &\leq b_k \leq \infty \\ b_k &[90, \infty] \end{aligned}$$

Sin embargo, este análisis, si bien es correcto, es solamente circunstancial e intuitivo. Ya hemos visto en el capítulo anterior que no solo debemos analizar la sensibilidad de la solución hallada frente a los cambios de los b_i , sino que también respecto a variaciones en los coeficientes del funcional, c_j .

Se discute este tema en el apartado “Límites de variación de Coeficientes y recursos relacionados con las variables básicas” en páginas siguientes.

b) La variable *slack* no está en la solución

Para este caso habremos de identificar, en primer lugar, cuáles son las variables de exceso que no están en la base, lo que es lo mismo que decir: las variables *slacks* que no están en la solución⁶. Estas variables son S_1 , que representa el sobrante del recurso de mano de obra de producción y S_2 , que representa el sobrante del recurso de mano de obra de rectificado. En la solución óptima ambas variables tienen el mismo valor: cero. Como se ve, ambas se relacionan biunívocamente con un elemento⁷ b_i

La interpretación es que, si seguimos el plan de producción óptimo, fabricaremos 70 kl de alcohol 1, 90 kl del tipo 2 y que sobrarán recursos de demanda. En cambio, los recursos de mano de obra tanto en producción como en rectificado se usaron completamente (se agotaron).

Como ya señalamos, si S_1 varía es que hubo un cambio en el recurso: por ejemplo, alguien hizo 10 horas extras y por lo tanto 230 pasó a 240 y S_1 pasó de cero a 10. En cambio, lo que en realidad ocurrirá, es que la planta se ADAPTA a las horas extras para mantener la condición de operación: NO DEBE SOBRAR recurso ($S_1=0$)

b_k	x_k	S_1
30	S_3	1/3
70	X_1	2/3
90	X_2	-1/3

Si se aumenta en una unidad el recurso producción, aumenta 1/3 el sobrante de demanda, en 2/3 la producción de alcohol 1 (x_1) y disminuye en -1/3 la producción de alcohol 2 (x_2)

Nos preguntamos: ¿Hasta qué valor puede disminuir x_2 ? Como se están fabricando 90, es evidente que si se aumenta el valor de S_1 se disminuirá la fabricación de alcohol 2, o sea se irá descontando a los 90 de a tercios hasta llegar a cero. La pregunta pasa a ser ¿A cuánto hay que llevar S_1 para que x_2 sea igual a cero? Será

⁶ No solo se trata de variables de exceso no básicas. Es posible que no aparezcan en la base alguna o algunas variables de decisión. El razonamiento es el mismo, aunque para mayor claridad en la explicación se hace solamente referencia a las *slacks*

⁷ Si se tratara de una variable de decisión X_j , entonces se relacionaría con un c_j

$$90 / (1/3) = 270$$

Significa que cuando $S_1 = 270$ se encuentra una situación tal que:

$$\begin{array}{lll} \text{de} & x_1 = 70 & \text{se pasa a} & x'_1 = 105 \\ & x_2 = 90 & & x'_2 = 0 \\ & S_1 = 0 & & S'_1 = 0 \end{array}$$

La cual será una solución alternativa.

Haremos, entonces un análisis que incluya a todas las variables que no están en la base, para lo cual utilizaremos el siguiente método basado en el procedimiento anterior,.

Para cada uno de los elementos del vector b_i

$$b_i - \Delta_{INF} \leq R \leq b_i + \Delta_{SUP}$$

$$\Delta_{INF} = \min \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right]_{a_{ij} > 0}$$

$$\Delta_{SUP} = \min \left[\frac{b_i}{a_{ij}} \right]_{a_{ij} < 0}$$

en este caso, se dispone de la siguiente base de cálculo:

		C_j	...	0	0
C_k	X_k	B	...	S_1	S_2
0	S_3	30	...	1/3	-2/3
3	X_1	70		2/3	-1/3
5	X_2	90		-1/3	2/3
	Z_j	660	...	0,33	2,33
	$C_j - Z_j$...	-0,33	-2,33

de la cual se obtienen las expresiones:

a) Para la columna S_1 :

$$S_3 / S_{11} = 30 / (1/3) = 90$$

$$X_1 / S_{12} = 70 / (2/3) = 105$$

$$X_2 / S_{13} = 90 / (-1/3) = -270$$

b) Para la columna S_2 :

$$S_3 / S_{21} = 30 / (-2/3) = -45$$

$$X_1 / S_{22} = 70 / (-1/3) = -210$$

$$X_2 / S_{23} = 90 / (2/3) = 135$$

Por lo tanto, quedan, en el primer grupo, un mínimo valor absoluto entre los positivos: 90 y un mínimo valor absoluto entre los negativos: - 270.

En el segundo grupo, un mínimo valor absoluto de los positivos, 135 y uno de los negativos: - 45.

Estos valores deben operarse en los b_i originales:

$$230 - (-270) = 500$$

$$230 - 90 = 140$$

$$250 - 135 = 115$$

$$250 - (-45) = 295$$

de esta manera, los recursos disponibles tienen los siguientes rangos de variabilidad, sin que se modifique la solución hallada:

$$140 \leq [b_1 = 230] \leq 500$$

$$115 \leq [b_2 = 250] \leq 295$$

con precios sombras de 0,333 y 2,333, respectivamente. (Compare con los valores hallados en la solución gráfica).

Hasta acá, efectuamos el análisis de sensibilidad correspondiente a los recursos b_1 y b_2 que se relacionan con las variables S_1 y S_2 , que son, además, las variables NO BASICAS. Falta analizar el recurso b_3 y los coeficientes c_1 y c_2 (que se corresponden con las variables básicas X_1 y X_2) y la variable S_3

Límites de variación de Coeficientes y recursos relacionados con las variables básicas

Volvemos a lo mencionado páginas atrás, la situación **a) las variables ESTÁN en la base**. Si queremos utilizar las herramientas recién discutidas que las hemos empleado para las variables que NO están en la base, entonces debemos encontrar la manera de adaptarlas. Recordamos que, en el caso del problema de los alcoholes, lo que nos falta analizar es:

X_1 que se relaciona con c_1 (ganancia que produce el alcohol 1)

X_2 que se relaciona con c_2 (ganancia que produce el alcohol 2)

b_3 que se relaciona con S_3 (Lo que falta para llegar a la demanda máxima del alcohol 2)

Vamos a mostrar la manera de abordar este análisis utilizando para ello un recurso matemático que consiste en plantear el **dual del problema**.

Dualidad

El modelo que hemos visto hasta ahora desde el comienzo de la discusión del método Simplex se conoce como **planteo Primal del problema**. Existe una forma alternativa de plantear el mismo problema, denominada **planteo Dual**, que tiene las siguientes características:

- Nos puede aportar elementos necesarios para la comprensión total del caso, e información complementaria sobre los análisis marginales (o de sensibilidad)
- Nos permite, en determinados problemas, arribar con más facilidad a soluciones que, de otra manera (con el Primal), sería muy dificultoso hallarlas. Por ejemplo, si el Primal tiene más variables que restricciones, convendría resolver el Dual, donde la situación se invierte.
- El Dual NO ES UNA ALTERNATIVA OPCIONAL, es la única manera de hacer el análisis de sensibilidad analítico de las variables no básicas
-

Pasos para convertir un Primal en Dual

Para construir el dual hay que tener presente algunos conceptos simples:

- 1) Es otra manera de plantear el mismo problema, así que siempre se parte del planteo primal
- 2) Si el Primal es un problema de maximización, su Dual será de minimización y viceversa.
- 3) Los coeficientes de la función objetivo del problema Primal (c_j) serán los coeficientes del vector de disponibilidades en el Dual (b_j)
$$c_j \rightarrow b_i$$
- 4) Los signos de las desigualdades de las restricciones del Primal serán contrarios en el Dual (de \leq pasan a \geq y viceversa)
- 5) La matriz de coeficientes tecnológicos del Primal será la matriz traspuesta en el Dual. ($a_{ij} \rightarrow a_{ji}$, o bien $A \rightarrow A^T$)
- 6) Las variables de decisión x_n del Primal se convierten en las variables *slacks* en el Dual.
- 7) Los coeficientes c_j del primal serán los recursos b_i del Dual
- 8) Las variables *slacks* del Primal serán de decisión Y_m en el Dual
- 9) Mientras que el Primal analiza la distribución y utilización de los recursos, el Dual analiza el valor de los mismos.

A partir del problema original en su forma Primal:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \equiv Max$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 230 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 250 \\ 0x_1 + 1x_2 &\leq 120 \end{aligned}$$

Se establece, según las reglas anteriores, su versión Dual, que es:

$$Z' = 230Y_1 + 250Y_2 + 120Y_3 \equiv \text{Min}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 &\geq 3 \\ 1Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

(Más las restricciones de no negatividad)

Cuya primera tabla Simplex es:

T1		$c_j \rightarrow$	230	250	120	0	0	M	M	Φ_k
c_k	Y_k	B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
M	Y_6	3	2	1	0	-1	0	1	0	$3/2=1,5$
M	Y_7	5	1	2	1	0	-1	0	1	$5/1=5$
Z		8M	3M	3M	M	-M	-M	M	M	
$c_j - Z_j$			$230 - 3M$	$250 - 3M$	$120 - M$	$0 - (-M) = M$	M	0	0	
Gran M			-3	-3	-1	1	1	0	0	

Debemos tener presente que:

- el problema tiene el criterio minimizante, por tanto, los costos de oportunidad que buscamos para avanzar, ahora, serán los más *negativos*;
- el coeficiente M de las variables artificiales es >0 por ser minimizante,
- el renglón "Gran M" se agrega para simplificar la lectura, y muestra solamente los coeficientes de M del renglón de los costos de oportunidad (renglón encima de ese), lo que da más claridad a la tabla.

Cuando hay "empate" en los costos de oportunidad, como es este caso, se analiza en contexto: $230 < 250$, por lo tanto, candidata a entrar Y_1 . En WinQSB se muestra la información de la siguiente manera: El costo de oportunidad que acá se representó completo, por ejemplo, en la columna Y_1 : $230 - 3M$, en WinQSB aparece "230" y la segunda parte se presenta como "Gran M" y el "-3M" queda solo como "-3"

$c_j - Z_j$		230	250	120	0	0	0	0	
Gran M		-3	-3	-1	1	1	0	0	

La siguiente tabla será:

T2		$c_j \rightarrow$	230	250	120	0	0	M	M	Φ_k
c_k	Y_k	B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
230	Y_1	1,5	1	0,5	0	-0,5	0	0,5	0	1,5/0,5=3
M	Y_7	3,5	0	1,5	1	0,5	-1	-0,5	1	3,5/1,5=2,33
Z		..3,5M	230	115 - 1,5M	M	-115+0,5M	-M	-0,5M	M	
$c_j - Z_j$			0	135 - 1,5M	120-M	115+0,5M	0+M	1,5M-115	0	
Gran M			0	-1,5	-1	-0,5	1	1,5	0	

La nueva candidata para entrar es Y_2 - La tercera tabla, que es la final, será:

T3		$c_j \rightarrow$	230	250	120	0	0	M	M	Φ_k
c_k	Y_k	B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
230	Y_1	0,33	1	0	-1/3	-2/3	1/3	2/3	-1/3	
250	Y_2	2,33	0	1	2/3	1/3	-2/3	-1/3	2/3	
Z		660	230	250	90	-70	-90	70	-90	
$c_j - Z_j$			0	0	30	70	90	M-70	M-90	
Gran M			0	0	0	0	0	1	1	

Como el problema primal era de maximización, sus variables llevadas al Dual (Y_m) serán valores marginales de utilidad de cada unidad adicional de entrada o de salida. Estas variables de dual equivaldrán a costos de oportunidad o a precios sombra.

El vector de disponibilidad en el primal se utiliza para determinar si las variables del dual tienen relación con el valor marginal de entrada o de salida. El valor absoluto de los coeficientes de la última fila ($c_j - Z_j$) indica lo que aumenta Z por incremento unitario en la variable correspondiente.

El análisis de sensibilidad se lleva a cabo, entonces, averiguando cuánto hay que variar S_1 y S_2 para que Y_1 e Y_2 sean cero:

Para c_1 , originado en el vector S_1

$$\frac{1/3}{-2/3} = -0,5$$

Para c_1 , originado en el vector S_1

$$\frac{2,333}{1/3} = 7$$

Para c_2 , originado en el vector S_2

$$\frac{1/3}{1/3} = 1$$

Para c_2 , originado en el vector S_2

$$\frac{2,333}{-2/3} = -3,5$$

Lo que indica, indirectamente, que los coeficientes del funcional DEL PRIMAL pueden variar de la siguiente manera:

$$V_{\text{inicial}} - \Delta V \leq c_j \leq V_{\text{inicial}} + \Delta V$$

$$(3 - 0,5 = 2,5) \leq c_1 \leq (3 + 7 = 10)$$

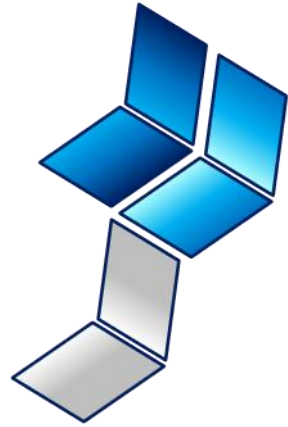
$$(5 - 3,5 = 1,5) \leq c_2 \leq (5 + 1 = 6)$$

$$2,5 \leq [c_1=3] \leq 10$$

$$1,5 \leq [c_2=5] \leq 6$$

Así hemos completado el análisis de sensibilidad que habíamos iniciado con la tabla Simplex final (T4) del primal y hemos terminado ahora con la tabla final (T3) del Dual.





Capítulo 4.

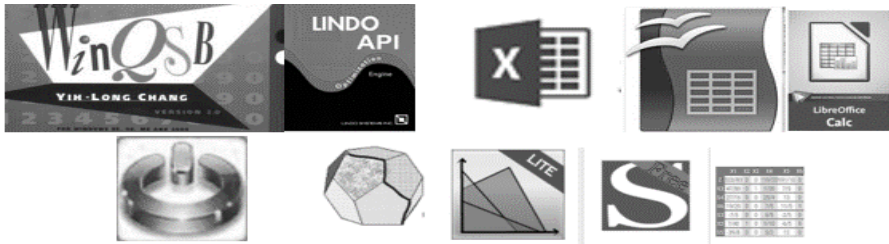
Programación Lineal.

Software para Resolver Modelos

En este capítulo presentamos diversos programas y aplicaciones para computadoras, tablets y teléfonos inteligentes que nos permiten resolver problemas de programación lineal.

El más antiguo de ellos, pero sin dudas el de mejores prestaciones en cuanto a nivel de profundidad y de seguridad es **WinQSB** (disponible en www.optimiza.org)

El programa está diseñado de manera tal que comprende todos los temas de la Investigación Operativa y muchos de administración de negocios. Fue diseñado con fines educativos, por lo cual su estructura de carga y análisis de datos es similar a la de los textos especializados. La particularidad es que, en el caso de Programación Lineal,



ofrece análisis de sensibilidad, análisis paramétrico y hasta un rudimentario enfoque gráfico. Lamentablemente no se ha actualizado ni adaptado a los nuevos sistemas operativos o arquitecturas, por lo cual debe instalarse solamente en sistemas operativos Windows de hasta 32 bits o, si se usan otros sistemas operativos, sobre máquinas virtuales⁸.

Le sigue el muy completo y documentado **LINDO/LINGO** (se pueden obtener versiones de evaluación en la internet), con análisis de sensibilidad incluido y posibilidad de programación. Al contrario del anterior, este programa se centra exclusivamente en la programación lineal y es actualizado permanentemente. La página oficial es www.lindo.com

La alternativa no específica, pero muy recomendable, son las planillas de cálculo tanto en sus versiones “open source” (OpenOffice.org **CALC** desde la versión 3 y LibreOffice **CALC**) (ambos, sin análisis de sensibilidad) como en las versiones pagas u “on line” de Microsoft Office **EXCEL** en todas sus versiones primitivas y las 97-2003 y 2007, 2010 y 2013 y las posteriores actuales. A diferencia de Calc, **Excel** incluye análisis de sensibilidad. Estos programas son actualizados permanentemente.

La página oficial de Apache OpenOffice es www.openoffice.org/es/. La página de LibreOffice es <https://es.libreoffice.org/> mientras que Microsoft Office tiene varias alternativas: Productos por suscripción (versión Hogar de *Office 365*) actualizable en forma permanente o versiones para Estudiantes (por ejemplo, *Office 365/año*) solo actualizable cuando se renueva la licencia. Tienen un servicio en la nube que permite guardar y archivar documentos desde cualquier pc o móvil, incluido en el precio. (<https://products.office.com/es-AR/>)

También existen aplicaciones de buena calidad “on line” como **PHPSimplex** (www.phpsimplex.com) sin límites en el número de variables, pero sin análisis de

⁸ En *optimiza.org* hay tutoriales que facilitan la tarea de instalación de máquinas virtuales.

sensibilidad. En ese mismo formato hay otros programas similares que sería largo enumerar, aunque todos funcionan de manera parecida.



Para los sistemas tipo *smartphone* o *tablets*, tanto en Android como en iOS hay varias aplicaciones concretas. Por ejemplo, se han evaluado las siguientes: **MathsTools Simplex Calculator** (también en versión *on line*) o **Linear Optimization, OR Simplex, Simplex Method**, para Android. En general no realizan análisis de sensibilidad, son estables (solamente hubo dificultades con *MathsTools*) y muy sencillos de usar.

Las páginas siguientes son una guía sencilla del uso de todos esos programas y aplicaciones. Para lograr lo que nos proponemos, hemos empleado como ejemplo el caso de la producción de alcoholes.

WINQSB

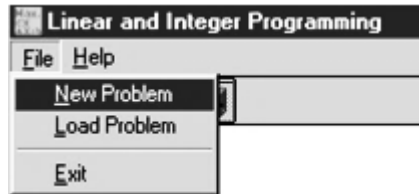
Debido a que WinQSB está desarrollado en forma modular, luego de su instalación, se encontrará una carpeta con varios programas individuales, cada uno de ellos correspondiente a un área de la Investigación Operativa. En diversos capítulos de este texto se detalla el uso de WinQSB aplicado a los temas que específicamente allí se tratan. Los pasos a seguir para Programación Lineal son los siguientes:



1. En la barra de tareas de Windows, seleccione INICIO – PROGRAMAS – WinQSB. Elija el módulo “Programación Lineal y entera” (*Linear and Integer Programming*) [LP/IP] del listado emergente:



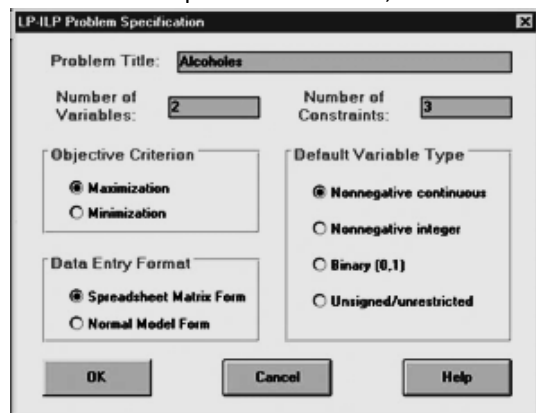
2. Una vez seleccionado el módulo PL/IP, aparecerá una simple pantalla con un menú “Archivo” (*File*) mediante el cual se pueden cargar los datos del problema, seleccionando Nuevo Problema (*New Problem*) o Cargar Datos (*Load Problem*), si es que estos datos ya estaban previamente guardados en un archivo propio de WinQSB en formato texto (ASCII).



3. Luego se mostrará una pantalla de especificación del problema, donde deben ingresarse los datos básicos:

- Nombre del problema (opcional)
- Cantidad de variables
- Cantidad de restricciones (sin contar las lógicas, solo las físicas)
- Si el criterio es maximizante o minimizante
- Tipo de variable (no negativas, continuas o enteras; binarias; irrestrictas). Téngase en cuenta que este es un valor general, puede haber problemas con más de un tipo de variables diferente al seleccionado en este paso. En ese caso es posible ajustar ese tipo individualmente para cada variable, más adelante en la fase de carga.
- Forma de ingreso de datos (hoja de cálculo o modelo matemático)

Completamos como se muestra en la figura a la derecha.



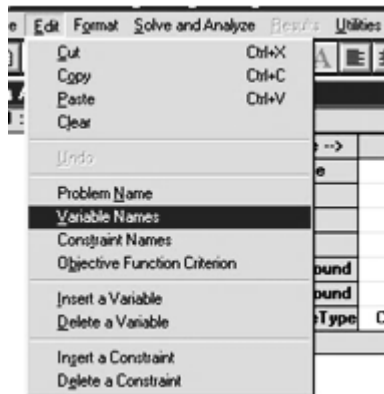
4. Para la carga (o modificación) de datos) debe tenerse en cuenta que, entre las funciones de este programa, está la transferencia automática del problema a la forma normalizada. Esto quiere decir que al momento de ingreso de datos no hay que hacer ninguna transformación: los datos del problema se cargan tal cual están en el

enunciado. De todas maneras, en la solución van a aparecer las variables slacks y artificiales necesarias.

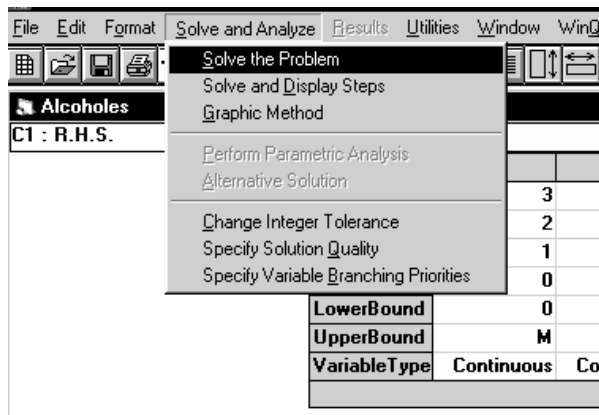
Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	3	5		
C1	2	1	<=	230
C2	1	2	<=	250
C3	0	1	<=	120
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

La forma de ingreso es similar a la de una hoja de cálculo: una barra de tareas, arriba, mostrará la celda de edición y dos botones permiten anular (X) o confirmar (V) la entrada, lo que se puede hacer también con *escape* (anula) y *enter* o cursor, (confirman). Un doble clic en la celda de la desigualdad provoca un cambio de sentido sucesivo en el orden de ella: <=; >=; =. También es posible limitar el campo de variabilidad estableciendo límites inferiores y superiores a cada una de ellas, las que, por defecto, están fijadas entre 0 e infinito (M). El último renglón (*Variable Type*) permite, como se dijo en el punto 3.5) más arriba, cambiar el tipo de cada variable.

5. También se puede cambiar el nombre por defecto de las variables y las restricciones mediante el menú *Edit – Variable Name o Constraint Name*. Este menú (*Edit*) sirve para editar algunos aspectos del problema: cambiar el criterio de maximizante a minimizante, agregar o quitar variables y restricciones, etc.



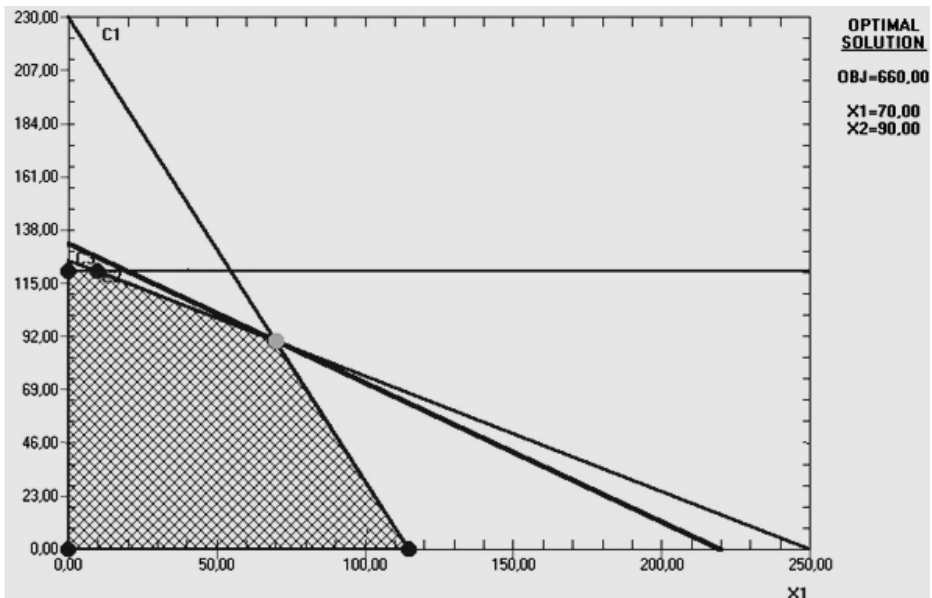
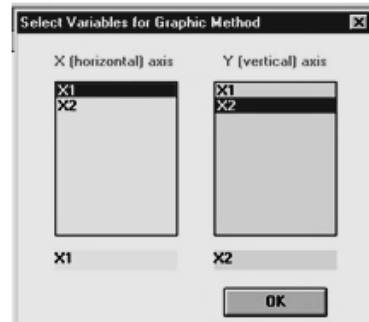
6. Ejecutar el módulo:



Una vez ingresados los datos, se ejecuta el menú **Resolver y Analizar** (*Solve and Analyze*). En lugar de **Resolver y...** también se pueden elegir otras opciones, como **Resolver Directamente** (*Solve the Problem*), **Resolver Paso a Paso** (*Solve and Display Steps*), **Resolver por Método Gráfico** (*Graphic Method*) y, además, cambiar las tolerancias.

Veremos las tres maneras de hallar la solución. En primer lugar, la solución gráfica, para el problema de los alcoholes:

a) **Método Gráfico** [*Graphic Method*]: cuando se selecciona esta variante del menú, aparece un cuadro de diálogo que permite elegir los ejes del gráfico, según se muestra en la figura. Por defecto se presentan los ejes X1, como absisa (x), y X2 como ordenada (y), aunque pueden permutarse. Luego se accede al gráfico pulsando el botón **OK**.

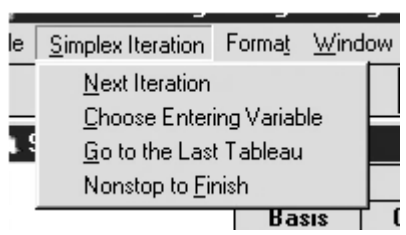


En la figura aparece el valor de Z óptimo(OBJ=660,00) y el que adoptan las variables de decisión en ese vértice.

b) Si, en cambio, optamos por hallar **la solución paso a paso** (segunda opción del menú), [*Solve and Display Steps*] aparecerán pantallas con cada una de las tablas del Simplex, quedando marcada la celda donde está el punto pivote y titulada como "*Ratio*" la columna que nosotros hasta acá denominamos Φ_k :

-- Iteration 1								
		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3,0000	5,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	2,0000	1,0000	1,0000	0	0	230,0000	230,0000
Slack_C2	0	1,0000	2,0000	0	1,0000	0	250,0000	125,0000
Slack_C3	0	0	1,0000	0	0	1,0000	120,0000	120,0000
	C(j)-Z(j)	3,0000	5,0000	0	0	0	0	

en cada una de estas pantallas se dispone del menú **Iteración del Simplex** (*Simplex Iteration*) el que permite acceder a la tabla siguiente, elegir una variable para entrar en la base, ir a la última tabla o ir directamente a la tabla final.

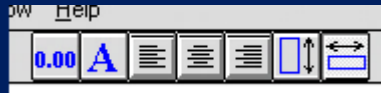


Si seleccionamos entrar cualquiera de las variables en la opción “*Choose Entering Variable*” accederemos a una segunda tabla donde se tiene fuerza la variable seleccionada para el siguiente punto pivote.

c) Por último, podremos acceder al resultado de **resolver directamente el problema**, usando la primera opción del menú [*Solve and Analyze*], que nos dá el siguiente **informe combinado**:

Combined Report for Alcoholes								
		29/05/2002	29/05/2002	29/05/2002	29/05/2002			
16:47:43								
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)	
1	X1	70,0000	3,0000	210,0000	0	basic	2,5000	10,0000
2	X2	90,0000	5,0000	450,0000	0	basic	1,5000	6,0000
	Objective	Function	{Max.} =	660,0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	
1	C1	230,0000	<=	230,0000	0	0,3333	140,0000	500,0000
2	C2	250,0000	<=	250,0000	0	2,3333	115,0000	295,0000
3	C3	90,0000	<=	120,0000	30,0000	0	90,0000	M

Puede ocurrir que el formato de la tabla no se vea completamente en el monitor, para ello existen “botones” de control a fin de regular la tipografía, el ancho y el alto de columnas y filas



La tabla del informe combinado (figura anterior superior), se divide en tres sectores:

1. **El primer sector** (renglones 1 y 2 en la tabla de la figura) se relaciona con las variables de decisión. La columna “*Solution Value*” indica el valor óptimo a producir de cada una de las variables (70 (mil) litros de X_1 y 90 (mil) litros de X_2). La columna “*Unit Cost (c_j)*” indica el coeficiente original en el funcional de cada una de las variables. La columna “*Total Contribution*” señala el producto $C_j X_j$ en cada uno de los j que entran en la solución, es la contribución al total del valor asumido por la variable. La columna “*Reduced cost*”, en el caso de las variables x_1 y x_2 , que son básicas (como puede verse en la columna “*Status*”) no tiene significado, por lo que su valor aparece como cero. Si fuera diferente a cero indicaría el sentido de evolución de la variable, que – además – no estaría en la base.

Por último, aparece un análisis de sensibilidad para los coeficientes de las variables de decisión, indicándose el mínimo y máximo para cada una de ellas para que se mantenga la solución hallada. Así, la ganancia de 3 para c_1 (corresponde a X_1) puede variar entre 2,5 y 10 sin que varíe el plan de producción y el 5 de c_2 (de X_2) entre 1,5 y 6.

2. **El segundo sector** simplemente presenta el valor de Z en el óptimo y el criterio utilizado. En este caso es maximizante y el valor de Z es igual a 660.
3. **El tercer sector** es similar al primero, pero referido a las restricciones. La columna “*Left Hand Side*” aquí presenta los valores que tienen las restricciones cuando se halla el óptimo. Así, la restricción 1 alcanza un valor de 230. La siguiente columna, “*Direction*”, indica el sentido de la desigualdad y la tercera el valor original del vector de disponibilidades.

El valor alcanzado por las *slacks* en el óptimo aparece en la columna “*Slack or Surplus*”. Aparecen las diferencias entre los valores del lado izquierdo (realidad) y los del lado derecho (disponibilidad). Así, la restricción 1, (horas en el sector elaboración), presenta un valor cero, lo que significa que todas las

horas del departamento están utilizadas: no hay holgura. Lo mismo en rectificando (restricción 2). El valor de 30 para la restricción 3 indica que hay una subocupación del recurso: se está produciendo 30 mil litros por debajo de los 120 mil que son el máximo posible.

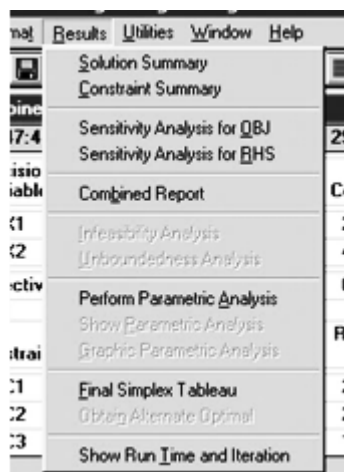
Luego aparece la columna “*Shadow price*”. El **precio sombra** es el valor del recurso involucrado en la restricción: 0,3333 para la restricción 1, es la ganancia adicional que se obtendría incrementando en una hora el tiempo de elaboración. En la restricción 2 si se incrementa en 1 hora el tiempo disponible en rectificando se obtiene una ganancia de \$ 2,3333 La restricción 3 indica que si se incrementa la demanda encima de 120 no se obtiene ganancia adicional. (Observe que la solución está debajo del límite de 120). Estos valores tienen el mismo significado si se cambia aumento por disminución. Si disminuye una hora la disponibilidad del sector de rectificando disminuirá el valor de Z en 2,3333.

Por último, se presenta el **análisis de sensibilidad del vector de disponibilidades** (o restricciones en el lado derecho), así la disponibilidad – agotada – de 230 horas en el sector producción puede variar desde 140 hasta 500 sin que cambie la solución óptima hallada en el sentido que es la intersección entre las restricciones 1 y 2, aunque sí variará el plan de producción y la ganancia obtenida.

Es posible acceder a otras formas de ver estos informes mediante el menú **Resultados (Results)**, teniendo en cuenta que hace falta que el problema ya esté procesado, (resuelto):

Las pantallas que se obtienen en cada caso son:

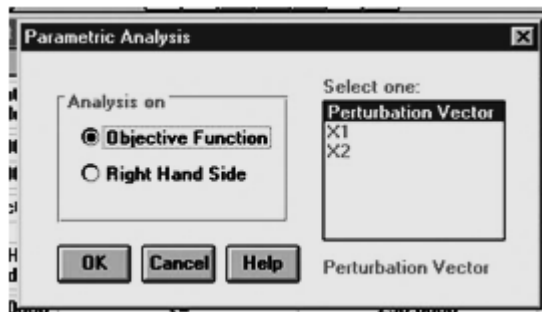
a) **Resumen de la solución**, solamente los valores finales y coeficientes de las variables de decisión:



05-29-2002 16:58:10	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	70,0000	3,0000	210,0000	0	basic
2	X2	90,0000	5,0000	450,0000	0	basic
	Objective Function		(Max.) =	660,0000		

b) **Análisis de sensibilidad de los coeficientes del funcional y del vector de disponibilidades, informe combinado.** Presenta los mínimos, máximos, actuales de cada elemento por separado o como ya lo hemos visto. (Más adelante, en este mismo capítulo, se explica cómo se puede ampliar este análisis).

c) **Análisis paramétrico,** permite ver un análisis de los coeficientes del funcional y otro para el vector de disponibilidades.



Mediante el **análisis paramétrico** podremos evaluar cómo cambia el valor de la función objetivo cuando se modifican los coeficientes del funcional (c_j) o los recursos (vector de disponibilidades (b_i)) aún más allá de los límites mínimos y máximos hallados más arriba, cuando se discutió el informe combinado. Si se llama C al vector de los coeficientes c_j , se llamará C' al vector de dirección de perturbaciones de dichos coeficientes, lo mismo para B y B' . Si se considera que existe un factor de perturbación u , se podría expresar una nueva función objetivo como

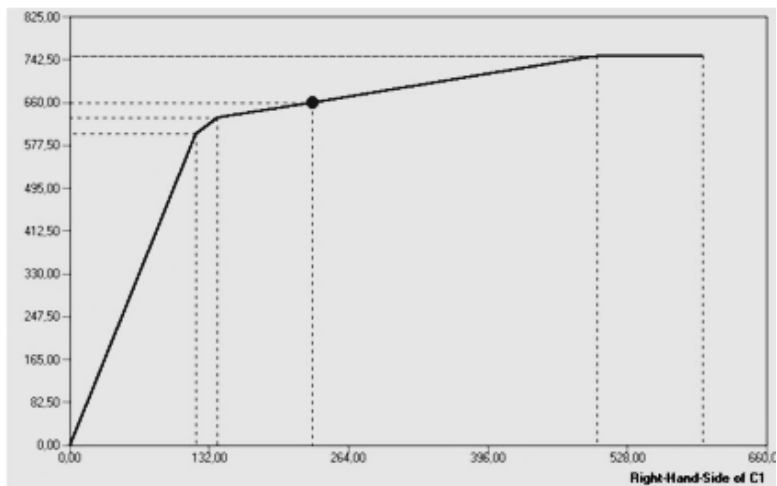
$$(C + uC')x$$

siendo x el vector de variables de decisión. Así hallaremos un nuevo conjunto de valores del lado derecho ($B + uB'$). Cuando ya hemos llegado a una solución óptima podremos asignar una dirección de perturbaciones para que el programa efectúe el análisis.

También se puede elegir cada uno de los coeficientes o cada uno de los valores del lado derecho. Por ejemplo, el ya visto análisis paramétrico de la primera restricción. (este tema se discutirá más adelante, en este mismo capítulo).

Parametric Analysis for Alcoholes -- Right-Hand-Side							
Range	From RHS of C1	To RHS of C1	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	230,0000	500,0000	660,0000	750,0000	0,3333	X2	Slack_C1
2	500,0000	M	750,0000	750,0000	0		
3	230,0000	140,0000	660,0000	630,0000	0,3333	Slack_C3	Slack_C2
4	140,0000	120,0000	630,0000	600,0000	1,5000	X1	Slack_C3
5	120,0000	0	600,0000	0,0000	5,0000	X2	
6	0	-Infinity	Infeasible				

La figura anterior es una salida con el formato de tabla de análisis paramétrico para la restricción Producción, donde vemos cómo cambia la función objetivo a medida que la

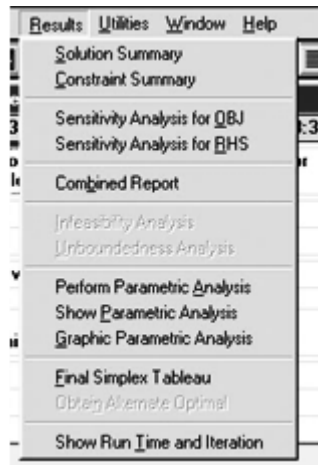


disponibilidad (originalmente 230) del recurso aumenta (primeros dos renglones) o disminuye (renglones 3 a 5). También se ve la pendiente del cambio. Esta pendiente permite obtener un gráfico denominado “**Diagrama transaccional**” como el que se muestra, para la misma restricción, en la figura de la derecha.

Estos resultados se obtienen si se encuentra primero la solución y luego se realiza el análisis paramétrico con lo que es posible acceder al menú correspondiente, optando entre *Perform Parametric Analysis (Análisis Paramétrico)* o *Graphic Parametric Analysis (Análisis Paramétrico Gráfico)*.

Complementos útiles

Uno de los aspectos interesantes del programa es la posibilidad de ver o cargar el problema en forma de ecuación simple (hasta ahora lo habíamos hecho como planilla de cálculo), mediante el menú **Formato** (*Format*) Esto debe ser elegido ANTES de resolver el problema y el formato es el que se muestra en la figura siguiente.



Alcoholes	
Maximize	3X1+5X2
	OBJ/Constraint/VariableType/Bound
Maximize	3X1+5X2
C1	2X1+1X2<=230
C2	1X1+2X2<=250
C3	1X2<=120
Integer:	
Binary:	
Unrestricted:	
X1	>=0, <=M
X2	>=0, <=M

también disponemos de la posibilidad de convertirlo a Dual, usando el mismo menú y también antes de resolver

Variable -->	C1	C2	C3	Direction	R. H. S.
Minimize	230	250	120		
X1	2	1		>=	3
X2	1	2	1	>=	5
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

A manera de ejercicio, y para comprender las posibilidades que brinda WinQSB, intente encontrar las matrices finales Simplex del DUAL del caso de los alcoholes para verificar que hay similitud con las que calculamos en el texto en el capítulo anterior. Use el menú *format*.

Cambios en un Parámetro (Análisis de Sensibilidad)

Siguiendo lo discutido en el análisis gráfico, veremos los resultados del problema original obtenido con WinQSB. Comenzaremos a plantearnos dudas o alternativas que obligarían a reformular el problema original (como hicimos en el capítulo anterior)

Se decide disminuir el precio de venta del Alcohol-1 en \$ 0,25 por kl. ¿Cómo varía el plan de producción?

El margen de ganancia pasa, en consecuencia, de \$ 3 a \$ 2,75. La solución original hallada corresponde a un plan de producción de $x_1 = 70$ y $x_2 = 90$. Queremos averiguar qué pasaría con ese plan de producción si el coeficiente c_1 de x_1 en la función objetivo pasara de 3 a 2,75

OBJ Coefficients for Alcoholes

05-30-2002 12:36:09	Decision Variable	Solution Value	Reduced Cost	Unit Cost or Profit C(j)	Allowable Min. C(j)	Allowable Max. C(j)
1	X1	70,0000	0	3,0000	2,5000	10,0000
2	X2	90,0000	0	5,0000	1,5000	6,0000

En la figura se ve el valor actual del coeficiente de cada variable (*"Solution Value"*) y en las dos columnas que están a la derecha aparecen los valores mínimos (*"Allowable Minimum"*) y máximos (*"Allowable Maximum"*) que esos coeficientes pueden tener sin que cambie el resultado actual de 70 y 90 para cada variable. Debemos tener en cuenta que el resultado $x_1 = 70$ y $x_2 = 90$ no cambia, pero si cambia el valor de la función Z ya que el margen de ganancia ha variado.

Cuando vimos el análisis gráfico también nos habíamos efectuado otras preguntas, una de las cuales era:

¿Cambia el margen de ganancia si uno de los empleados de tiempo parcial en elaboración trabaja 10 horas en lugar de 15 por semana?

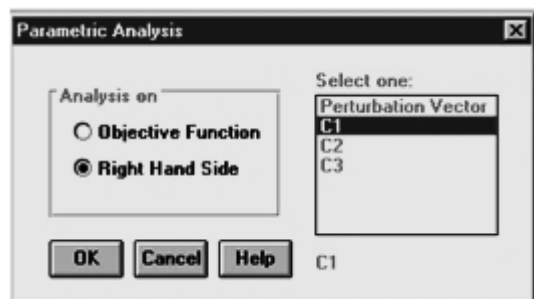
the Right-Hand-Sides for Alcoholes						
05-30-2002 12:34:27	Constraint	Direction	Shadow Price	Right Hand Side	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	<=	0,3333	230,0000	140,0000	500,0000
2	C2	<=	2,3333	250,0000	115,0000	295,0000
3	C3	<=	0	120,0000	90,0000	M

Observando la figura, vemos que, para cada restricción se presenta un valor actual ("Right Hand Side") tal como fue cargado con los datos, y un mínimo y máximo ("Allowable Minimum" y "Allowable Maximum", respectivamente). Ya habíamos mencionado el precio sombra. Ese precio sombra (*Shadow Price*) tiene valor siempre y cuando el lado derecho de las restricciones permanezca dentro de un cierto rango, que es el que está entre los máximos y mínimos arriba mencionados:

El precio sombra de 0,3333 para la restricción 1 tiene validez mientras el tiempo de horas de elaboración fluctúe entre 140 y 500. (Cada hora adicional incorporada al sector de elaboración desde la actual 230 hasta 500 incrementa la ganancia total (Z) en \$ 0,333. Cada hora menos en ese sector de elaboración desde la actual de 230 y hasta 140 disminuye esa ganancia en \$ 0,333).

Cambios en un parámetro fuera del rango de variabilidad (Análisis Paramétrico)

Vamos a optar por analizar cada restricción individualmente. En la figura se muestra la selección de la restricción 1 (C1). Para acceder a este cuadro usamos el menú *Result – Perform Parametric Analysis*.



En la primera línea del cuadro de resultados que obtenemos, vemos el rango de variabilidad de los valores del lado derecho, dentro de los límites ya vistos: 230 a 500, con un precio sombra (indicado acá como una pendiente) de 0,333, que produce incrementos del funcional desde los actuales 660 (para $b_1 = 230$) hasta 750 (para $b_1 = 500$).

or Alcoholes -- Right-Hand-Side							
Range	From RHS of C1	To RHS of C1	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	230,0000	500,0000	660,0000	750,0000	0,3333	X2	Slack_C1
2	500,0000	M	750,0000	750,0000	0		
3	230,0000	140,0000	660,0000	630,0000	0,3333	Slack_C3	Slack_C2
4	140,0000	120,0000	630,0000	600,0000	1,5000	X1	Slack_C3
5	120,0000	0	600,0000	0,0000	5,0000	X2	
6	0	-Infinity	Infeasible				

La siguiente línea, la 2, toma el tramo superior de variabilidad: los valores del lado derecho desde $b_1 = 500$ a infinito: la pendiente o precio sombra es cero y – por tanto – el valor de la función objetivo va de 750 a 750 (no cambia), lo que quiere decir que, en este escenario, incrementar recursos no significa incrementar ganancias.

Las demás líneas, tal como lo vimos en el capítulo donde hicimos el análisis gráfico, muestran la variabilidad de los valores del lado derecho desde $b_1 = 230$ a cero, en los tramos que hemos hecho anteriormente: $b_1 = 230$ a $b_1 = 140$; de $b_1 = 140$ a $b_1 = 120$ y de $b_1 = 120$ a $b_1 = 0$. (Nótese que se presenta un tramo 0 a menos infinito, indicado como no calculable).

En cada incremento/decremento también se indica qué variables salen (*leaving*) y entran (*entering*) a la base. Se sobreentiende que – al ser esto un análisis – si se llegara a optar por un punto límite, las condiciones de operación están determinadas por el recurso que varió: si hay 140 hH/s, por ejemplo, entonces solo se puede hacer $x_1 = 10$ y $x_2 = 120$, y no sobrarán recursos. Si hay menos de 140 hH/s, entonces sobrará el recurso hH/s de rectificado, pero el punto de operación lo determina el análisis paramétrico.

Estas son las capturas de pantallas correspondientes a las restricciones 2 (mano de obra Rectificado) y 3 (demanda de alcohol tipo 2):

Range	From RHS of C2	To RHS of C2	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	250,0000	295,0000	660,0000	765,0000	2,3333	Slack_C3	Slack_C2
2	295,0000	M	765,0000	765,0000	0		
3	250,0000	115,0000	660,0000	345,0000	2,3333	X2	Slack_C1
4	115,0000	0	345,0000	0	3,0000	X1	
5	0	-Infinity	Infeasible				

or Alcohols -- Right-Hand-Side

Range	From RHS of C3	To RHS of C3	From OBJ Value	To OBJ Value	Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	120,0000	M	660,0000	660,0000	0		
2	120,0000	90,0000	660,0000	660,0000	0	Slack_C3	Slack_C2
3	90,0000	0	660,0000	345,0000	3,5000	X2	
4	0	-Infinity	Infeasible				

LINGO - LINDO

LINGO es un programa derivado de otro llamado LINDO, del cual acá mostramos capturas de pantallas correspondientes a la versión 8 para Windows². Si bien en la página oficial (www.lindo.com) aún se indica que hay una versión para estudiantes, no aparece disponible en julio 2018, aunque sí se ofrecen versiones de prueba.

Existe un complemento de LINGO para instalar en las planillas *Excel* denominado "*What'sBest!*" que permite construir modelos lineales, no lineales o enteros en una planilla de manera simple y usando ecuaciones. No es muy diferente al *Solver* que está incluido en *Excel*.

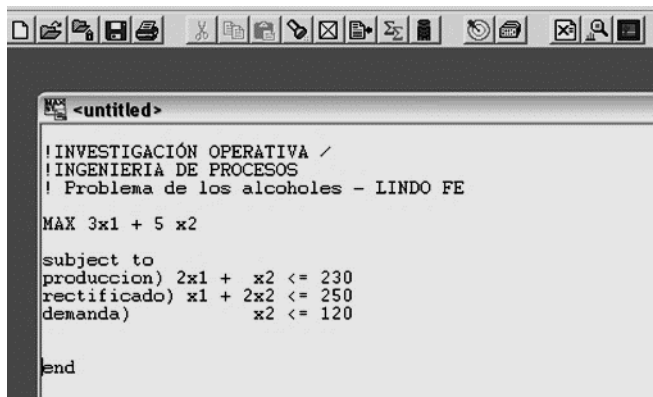
Hay otra aplicación LINDO que se denomina LINDO API y permite la creación de programas de optimización escritos por el usuario.

La mencionada versión exclusiva para estudiantes, *LINDO for Windows*, sobre la cual se desarrollan estos comentarios, (aunque se harán algunas referencias a LINGO, fundamentalmente porque este último es más poderoso y tiene un campo de aplicación más desarrollado), que aparentemente fue discontinuada, aun puede obtenerse en diversos sitios y es ofrecida gratuitamente en www.optimiza.org

Finalmente, la aplicación independiente para resolver problemas de optimización, actualmente se denomina LINGO. Esta aplicación usa una sintaxis ligeramente diferente a LINDO para estudiantes, pero que, sin embargo, admite las dos maneras de expresión de la sintaxis.

Ambas aplicaciones están orientadas a programación lineal, entera, binaria, etc. y pueden usarse en la mayor parte de los temas abarcados por la asignatura, siempre que los problemas se conviertan a la forma lineal. Por ejemplo, LINDO no tiene un módulo específico para transporte, pero pueden resolverse los problemas de transporte.

Con el menú *File – New* se accede a un editor de textos en el cual el problema se escribe en forma directa respetando algunas reglas sintácticas simples. El problema de los alcoholes, por ejemplo, se escribe como se muestra en la figura siguiente⁹.



```
! INVESTIGACIÓN OPERATIVA /
! INGENIERÍA DE PROCESOS
! Problema de los alcoholes - LINDO FE

MAX 3x1 + 5 x2

subject to
produccion) 2x1 + x2 <= 230
rectificado) x1 + 2x2 <= 250
demanda) x2 <= 120

end
```

El carácter “!” indica que lo que sigue en esa línea es un comentario introducido por el usuario (el que está ingresando el modelo) y, por tanto, no es operable ni forma parte del problema.

El verdadero modelo comienza con las palabras **MAX** o **MIN**, exclusivamente. Luego se escribe la función objetivo con las constantes que pueden estar seguidas, o no, cada una de ellas, de un espacio. Después de la constante se escribe la correspondiente variable, que se representa como un conjunto de letras o letras y números (Por ejemplo, son nombres de variables: **XLZ**, **X1**, **C22**, **VARIABLE3**, **VAR3**, etc.). Es así que podríamos escribir el funcional del problema de los alcoholes de cualquiera de estas formas:

⁹ NOTA MUY IMPORTANTE: Debido a la continua renovación de versiones las figuras que siguen y las instrucciones son sobre la versión ofrecida en www.optimiza.org por lo que puede haber diferencias menores con las versiones obtenidas en lingo.com

$$3X1+5X2$$

o bien

$$3 X1 + 5 X2$$

o bien

$$3 \text{ ALCOUNO} + 5 \text{ALCO2}$$

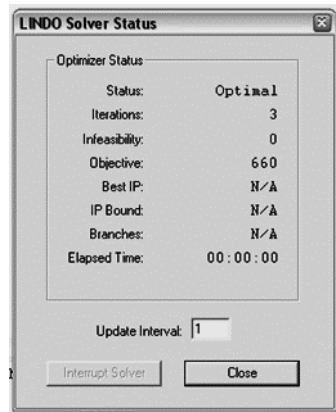
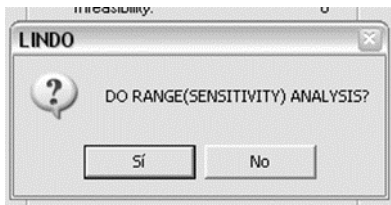
u otras.

Posteriormente se escriben las restricciones, comenzando con la frase **SUBJECT TO**. El modelo completo se finaliza con la palabra **END**.

El modelo se ejecuta con el botón “diana” o con el menú *Solve*, luego de lo cual una ventana emergente permite habilitar el análisis de sensibilidad, como vemos en las figuras.



En este punto se obtiene un informe simple de estado de la modelización resuelta.



La planilla de resultados, que el programa presenta como una ventana independiente, es como la que se ve en la figura de la página siguiente.

IP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 660.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	70.000000	0.000000
X2	90.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
PRODUCC)	0.000000	0.333333
RECTIF)	0.000000	2.333333
DEMANDA)	30.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	3.000000	7.000000	0.500000
X2	5.000000	1.000000	3.500000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
PRODUCC	230.000000	270.000000	90.000000
RECTIF	250.000000	45.000000	135.000000
DEMANDA	120.000000	INFINITY	30.000000

Observamos que a los precios sombra se los denomina *Dual Prices* (Costos en el dual), aunque el resto es similar a las presentaciones ya vistas en WinQSB.

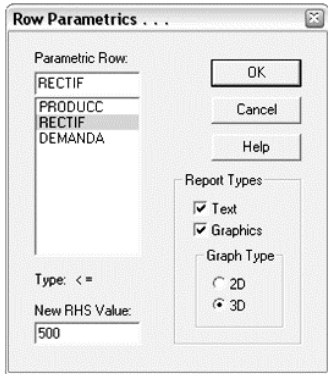
Teniendo en foco la ventana de edición del modelo es posible acceder al menú resultados (*Reports*), desde el cual se obtienen diferentes informes, tal como el formato de tabla que se muestra a continuación:

Reports	Window	Help
Solution...	Alt+0	
Range	Alt+1	
Parametrics...	Alt+2	
Statistics	Alt+3	
Peruse...	Alt+4	
Picture...	Alt+5	
Basis Picture	Alt+6	
Tableau	Alt+7	
Formulation...	Alt+8	
Show Column...	Alt+9	
Positive Definite		

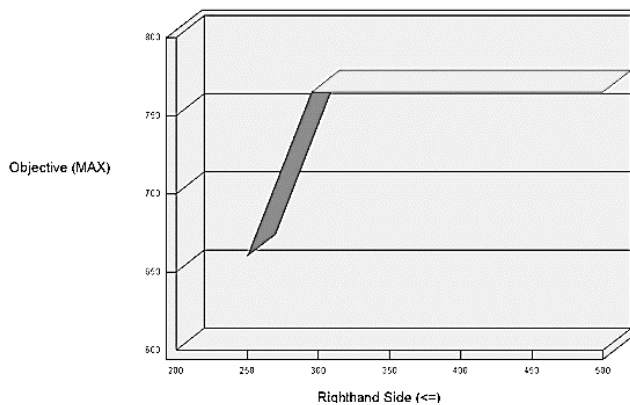
Esta opción agregaría al final del reporte anterior la siguiente tabla:

THE TABLEAU							
ROW (BASIS)		X1	X2	SLK 2	SLK 3	SLK 4	
1	ART	0.000	0.000	0.333	2.333	0.000	660.000
PRODUCC	SLK 4	0.000	0.000	0.333	-0.667	1.000	30.000
RECTIF	X1	1.000	0.000	0.667	-0.333	0.000	70.000
DEMANDA	X2	0.000	1.000	-0.333	0.667	0.000	90.000

También permite hacer un análisis paramétrico, para ello se accede al menú Reports, Parametrics..., con lo cual se accede a un cuadro de diálogo, en el que se puede elegir la restricción a analizar, y hasta que número se va a hacer ese análisis a partir del valor actual. La salida (informe) que se obtiene está en formato texto, aunque – opcionalmente – se puede acceder a un gráfico, ambas salidas sujetas a los límites señalados. En el ejemplo que vemos en la figura siguiente hemos pedido un valor tope RHS de 500, escribiéndolo en la ventana correspondiente, que señalaba el valor original de 230, reemplazándolo por 500:



RHS Parametrics for Row: RECTIF



	RHS	INCREASE	DECREASE
PRODUCC	230.000000	270.000000	90.000000
RECTIF	250.000000	45.000000	135.000000
DEMANDA	120.000000	INFINITY	30.000000

RIGHTHANDSIDE PARAMETRICS REPORT FOR ROW: RECTIF						
VAR OUT	VAR IN	PIVOT ROW	RHS VAL	DUAL PRICE BEFORE PIVOT	OBJ VAL	
			250.000	2.33333	660.000	
SLK	4 SLK	3	295.000	2.33333	765.000	
		2	500.000	-0.222045E-15	765.000	

Algo más sobre LINDO

Palabras Reservadas

Lindo es un Software comercial orientado casi exclusivamente a programación lineal. No es un programa que tenga la difusión (ni el perfil de usuario) que tienen programas como Excel, ya que a diferencia de éste su uso es específico y tiene, además, un costo considerable. A pesar de ello, la versatilidad de poder plantear “coloquialmente” el problema hace que sea una opción a tener muy en cuenta, recordando que se pueden obtener versiones “demo” en la página web de la asignatura.

En la ventana de edición del modelo se usan determinadas palabras para indicar los elementos estructurales del modelo que estamos planteando. Esas palabras se denominan “reservadas” y no se pueden usar para otro fin (por ejemplo, no es posible llamar a una variable “end” o “End” o “END” porque esa palabra está destinada a otra función: se usa para señalar el fin del conjunto de las restricciones) y por ello se denominan “reservadas”. Las palabras reservadas se listan a continuación, acompañadas de una breve descripción de su uso:

!	Se coloca en un renglón en cualquier lugar e indica que lo que sigue en ese renglón es un comentario no ejecutable
MAX	Indica que el modelo que sigue en el renglón es maximizante
MIN	Ídem, minimizante
TITLE	Permite agregar un texto asociado al modelo de hasta 73 caracteres
SUBJECT TO	Indica que todas las expresiones de los renglones siguientes son restricciones, hasta que se encuentre una sentencia END
ST	Igual que SUBJECT TO
)	Indica que lo anterior al símbolo es el nombre de la restricción que sigue
+ y -	Operadores aritméticos válidos

>=, =, <=	Operadores de restricción, si se usa < se interpreta <=
END	Fin de la lista de restricciones
INT	La variable indicada es binaria (0 o 1)
GIN	Las variables indicadas son enteras (<i>General Integer</i>),(0, 1, 2, 3, ...)
SLB	Las variables indicadas tienen límite inferior
SUB	Las variables indicadas tienen un límite superior
FREE	Las variables indicadas no reconocen la restricción de no negatividad ni ninguna otra
QCP	Permite declarar un modelo cuadrático

Variables y Comandos

Las variables y los comandos o sentencias imperativas pueden escribirse en mayúsculas o minúsculas. Los nombres de las variables pueden ser de hasta ocho caracteres.

Sintaxis del modelo

El modelo debe comenzar con las palabras reservadas **MAX**, o **max**, o **MIN**, o **min** Puede ser escrito con retornos de carro en cualquier lugar. Como ejemplo, en la figura siguiente se presentan dos modelos idénticos pero escritos de formas diferentes.

<pre> MAX 3 C1 + 5 C2 SUBJECT TO PROD) 2 C1+ C2 <= 230 RECT) C1 + 2C2 <= 250 DEM) C2 <= 120 END </pre>	<pre> Max 3 C1 + 5 C2 ST PROD) 2C1+C2<=230 RECT) C1+ 2C2<=250 Dem) C2<=120 END </pre>
--	--

Archivos de comando

Se puede escribir un modelo en el cual se incluyan órdenes (o comandos), por ejemplo, el siguiente, que que hemos diseñado así: en el primer renglón escribimos la declaración de la función objetivo, en el segundo la abreviatura de **subject to**, en el

tercero, cuarto y quinto las restricciones, en el sexto la declaración de fin de restricciones y en el séptimo agregamos, incluimos, el comando (GO) que le dá la orden al programa de ejecutar (resolver) el modelo que escribimos hasta ahí. Recuerde que este mismo modelo, sin el comando que ahora incluimos, lo habíamos escrito antes y que, para resolverlo, teníamos que usar el ícono “diana” y hacer clic en ella. Ahora, simplemente con cargar es modelo, se ejecutará.

```
MAX 3 QA1 + 5 QA2
ST
PR) 2 QA1 + QA2 <= 230
RE) QA1 + 2QA2 <= 250
DE) QA2 <= 120
END
GO
```

← acá incluimos la orden “correr” (GO)

Esta serie de renglones debe ser escrita utilizando el editor del mismo programa, como se hace habitualmente, o, si resultara cómodo, cualquier editor externo de textos, luego de lo cual se debe guardar con *Save*, usando cualquier nombre y la extensión *.ltx*, por ejemplo ALCOCOM.LTX.

Para ejecutar esta demostración es conveniente cerrar todas las ventanas abiertas. Luego seleccione en el menú *File*, el submenú **TAKE COMMANDS** y observe que se abre el archivo, se carga el modelo, pero que, además, al encontrar la sentencia **GO** se ejecuta y presenta el informe general.

Mediante la sentencia *Load* puede ser usado el mismo modelo para ensayar otros comandos, por ejemplo, probaremos modificar el archivo incorporando un comando que borre la tercera restricción. Así nos queda el modelo original, un borrado y la orden de ejecutar y mostrar el resultado:

```
MAX 3 QA1 + 5 QA2
ST
PR) 2 QA1 + QA2 <= 230
RE) QA1 + 2QA2 <= 250
DE) QA2 <= 120
END
DEL DE
DE
GO
```

← acá incluimos la orden “borrar” (DEL) la restricción

Luego de efectuadas las modificaciones nuevamente guardamos. Al realizar la operación *Take commands*, deberá obtenerse la eliminación de la restricción N° 3 (**QA2 <=120**) y el informe estándar del resultado del problema, igual al anterior, pues se ha eliminado una restricción que aparece en la base y que no forma parte de las que configuran el óptimo (ver la solución gráfica del mismo problema)

Por último, podremos repetir el proceso con el fin de probar los siguientes cambios:

```
MAX 3 QA1 + 5 QA2
ST
PR) 2 QA1 + QA2 <= 230
RE) QA1 + 2QA2 <= 250
DE) QA2 <= 120
TABLEAU
GO
```

Con esta modificación obtendremos la tabla simplex del problema enunciado y el informe estándar del resultado.

Lista de comandos

La siguiente es una lista de algunos de los comandos disponibles:

FBR	Recupera una base guardada con el comando FBS
FINS	Recupera una base guardada con el comando FPUN
LEAVE	Termina un texto de comando
MAX/MIN	Comienza un modelo
RETR	Recupera un problema guardado con SAVE
TAKE	Toma un comando de un archivo de comandos
LOOK	Muestra todo o parte del modelo
NONZ	Muestra la solución para los valores no cero
RANGE	Muestra el análisis de rango
SHOCOLUMN	Muestra una columna (variable) del modelo
SOLUTION	Muestra el informe normal de la solución
TABLEAU	Muestra la tabla actual
DIVERT	Manda la pantalla de salida a un archivo
FBS	Guarda la base actual en formato LINDO
FPUN	Guarda la base actual en formato MPS
SAVE	Guarda el modelo actual en un archivo comprimido
SDBC	Guarda la solución en formato de base de datos/columna
SMPS	Guarda el modelo en formato MPS
GO	Resolver el problema
PIVOT	Ir a una iteración simplex
APPC	Agregar una nueva columna (variable de la formulación)
DEL	Borrar una restricción determinada
EXT	Agrandar el problema por adición de restricciones
FREE	Declara que una variable es irrestricta en su signo
SLB	Establece un límite inferior a una variable
SUB	Establece un límite superior a una variable
BIP	Establece un límite a un modelo de programación entera
GIN	Variable general entera (0,1,2,...)
INT	Variable binaria (0, 1)
PARAMETRICS	Realiza un análisis paramétrico del vector RHS
!	Inserta un comentario
BATCH	Indica que ejecuta por lotes
PAGE	Define la longitud de la página o la pantalla
PAUSE	Pausa para que se acepte una entrada por teclado
TERSE	Coloca un estilo conversacional para la salida, simplificando el informe
VERB	Recoloca el informe normal
WIDTH	Establece el ancho de la pantalla de salidas
INVERT	Invierte la base actual
STATS	Muestra un resumen estadístico del modelo
TITLE	establece, cambia o devuelve el título del modelo
QUIT	Sale de Lindo

Listado completo de comandos:

1) INFORMACION

HELP COM LOCAL CAT TIME DATE

2) ENTRADAS

MAX MIN RETR RMPS TAKE LEAV RDBC FBR FINS

3) PRESENTACION

**PIC TABL LOOK NONZ SHOC SOLU RANGE BPIC CPRI
RPRI DMPS PPIC LKLG**

4) SALIDA A ARCHIVO

SAVE DIVE RVRT SMPS SDBC FBS FPUN SMPN

5) SOLUCION

GO PIV GLEX

6) EDICIÓN DE PROBLEMAS

ALT EXT DEL SUB APPC SLB FREE

7) QUIT

8) PROGRAMACIÓN ENTERA, CUADRÁTICA Y PARAMÉTRICA

INT QCP PARA POSD TITAN BIP GIN IPTOL

9) PARAMETROS DE PRESENTACIÓN

WIDTH TERS VERB BAT PAGE PAUS

10) REUTINAS DE USUARIO

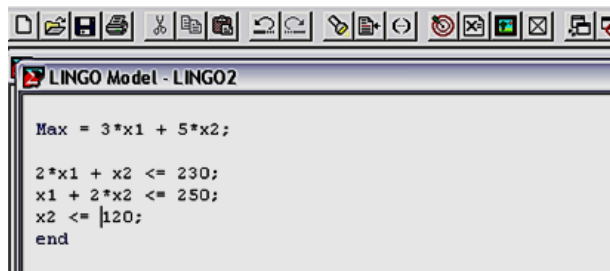
USER

11) OTRAS FUNCIONES

INV STAT BUG DEB SET TITL NEWPW

Algunas consideraciones sobre LINGO

La sintaxis de carga del modelo es diferente en LINGO respecto de LINDO, debido a que el primero permite trabajar con modelos no lineales incorporando operaciones como la división y la potenciación:



```
Max = 3*x1 + 5*x2;  
2*x1 + x2 <= 230;  
x1 + 2*x2 <= 250;  
x2 <= 120;  
end
```

Sintaxis de carga de modelo

Se incorpora la posibilidad (no obligatoria) de utilizar el punto y coma (;) como expresión del “retorno de carro” (no significa que lo que sigue deba escribirse en otra línea, significa que se interpreta que lo que sigue **es** otra línea). Por ejemplo, el siguiente es el mismo modelo que habíamos seguido hasta ahora y funciona igual. Está escrito en un solo renglón físico pero su sintaxis representa cinco líneas:

```

LINGO Model - LINGO1
Max = 3*x1 + 5*x2; 2*x1 + x2 <= 230; x1 + 2*x2 <= 250;
x2 <= 120; end

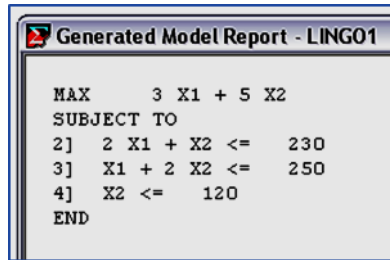
```

Haciendo clic en el botón de la diana o seleccionando *Solver*, se encuentra el resultado:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	70.00000	0.000000
X2	90.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	660.0000	1.000000
2	0.000000	0.3333333
3	0.000000	2.333333
4	30.00000	0.000000

Pulsando en el menú LINGO y optando por *Generate > Display Model*, se convierte la entrada en un modelo clásico: en nuestro ejemplo, en el que se habíamos escrito todo el modelo solo separado por (;), obtendremos lo siguiente:



```
Generated Model Report - LINGO1

MAX      3 X1 + 5 X2
SUBJECT TO
2]  2 X1 + X2 <=  230
3]  X1 + 2 X2 <=  250
4]  X2 <=  120
END
```

La potencia de LINGO radica en su capacidad de trabajar en forma interactiva (leyendo y escribiendo, por ejemplo, datos de una planilla Excel o Calc) lo que abre la posibilidad de programar problemas más complejos o de otra índole, por ejemplo, análisis de redes, PERT con tiempo de choque, etc. El desarrollo de estas capacidades excede los alcances del curso y de esta publicación, aunque hay bibliografía disponible.

Planillas de cálculo Excel y Calc

Introducción - Uso de MS Office Excel y Apache/LibreOffice Calc

Excel

Excel es un producto comercial que forma parte de una “suite” (que es como se llama a un conjunto de programas interrelacionados) llamada *Microsoft Office*. Coexisten en forma operativa varias versiones con pocas diferencias entre ellas y conocidas por el año en que fueron lanzadas comercialmente.

Las versiones que circulan habitualmente son: Office 97, Office 2003, Office 2007, Office 2010, Office 2013 y las posteriores, sin mayores cambios – en lo que interesa en esta publicación – respecto a la 2013. Las dos primeras (que son las más raramente utilizadas debido a su antigüedad) son semejantes entre sí, con excepciones en la apariencia y disponibilidad o ubicación de ciertos comandos. Las restantes (similares entre sí) son diferentes a las anteriores no solo en el aspecto, sino también la funcionalidad, el sistema de archivos y la capacidad de manejo de valores numéricos. Tienen, además, diferencias en el modo de carga de datos.

Respecto al sistema de archivos, las hojas de cálculo en las versiones 97-03 se guardan de manera predeterminada en un formato caracterizado con la extensión “.xls”, aunque hay otras opciones. En las series 2007 en adelante, la forma predeterminada usa la extensión “.xlsx” aunque están disponibles todas las versiones anteriores. De esta

manera los archivos generados son compatibles entre sí y entre otros sistemas operativos.

Existe abundante literatura respecto a cómo se usan los programas de Office y sobre las posibilidades que brindan cuando se los emplea en diversas tareas. En ediciones anteriores de *Optimiza* habíamos incluido elementos básicos sobre su utilización a fin de aprovechar algunas de las características que tiene y que son aplicables a los contenidos discutidos en nuestras asignaturas. En esta edición hemos incluido solamente una guía para utilizar los complementos necesarios para resolver los modelos presentados. Esta decisión se basa en que Excel es un programa que se encuentra disponible en forma generalizada, constituyendo una herramienta básica prácticamente universal de la ingeniería. No obstante, los interesados pueden obtener versiones de la guía básica en la página web www.optimiza.org y en el Anexo II de esta publicación.

Calc

Calc es el nombre de una planilla muy semejante a *Excel* que está incluida en los “paquetes” de utilidades *OpenOffice.org* y en una versión muy semejante denominada *LibreOffice*. Ambos tienen prestaciones también semejantes a *MS Office* (Ver Anexo III).

El primero de estos paquetes fue, en sus inicios, un desarrollo de *Sun Microsystems*, posteriormente adquirido por la firma *Oracle*. Actualmente se distribuye con la denominación oficial “*APACHE OpenOffice*”. Está originado bajo el concepto de software de código abierto que puede ser modificado o no por los usuarios. No debe confundirse “software libre” con “software gratis” sobre todo si se parte del inglés (“*free*”) para ambas expresiones. El software libre puede ser vendido, aunque este no es el caso de *OpenOffice.org* ni de *Libre Office*. Este último fue creado – precisamente – para evitar cualquier intento de *Oracle* en ese sentido. Por ello ambos (que son similares entre sí) pueden ser obtenidos gratis, aunque requieren un acuerdo de los términos de licencia.

Las planillas generadas por Excel son compatibles en todas sus versiones con Calc, es decir pueden ser leídas y modificadas por este programa.

Solver

Desde las primeras versiones de Excel (y de todas las Planillas de cálculo que existían en esa época, Lotus 1-2-3, Quattro, etc.) se encuentra que tienen una utilidad funcional (que es una macro, o complemento) llamada *Solver*.

Como *Solver* fue creado en la década de 1980, no se incluyó nunca en Calc, que apareció mucho tiempo después. Por esa causa, en las primeras versiones de Calc un tercero desarrolló e introdujo una macro con el mismo nombre pero que no es exactamente igual y que debía obtenerse e instalarse por separado (*add in*). Esto último ya fue superado y a partir de OpenOffice.org versión 3.0 y en todas las de Libre Office se incluye un complemento similar, que se denomina indistintamente “*Solucionador*” y “*Solver*”, que permite resolver problemas de Programación Lineal (y otros) aunque con ciertas limitaciones, entre ellas la que no hace análisis de sensibilidad.

Veremos a continuación¹⁰ cómo se utilizan ambas hojas, tanto **Office-Excel** como **OpenOffice.org o LibreOffice-Calc** para lo cual seguiremos usando como ejemplo el problema de Alcoholes Argentinos.

Planteo del problema.

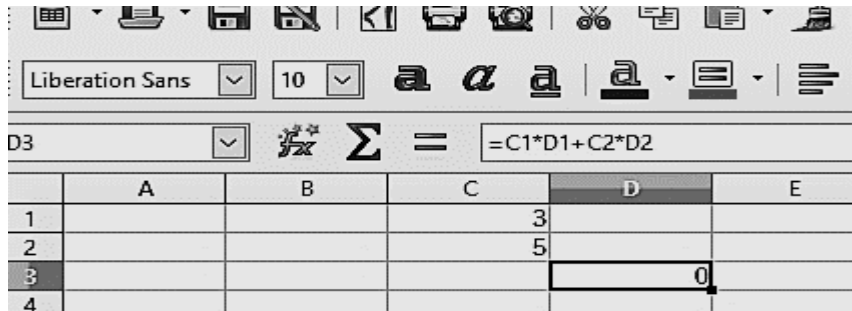
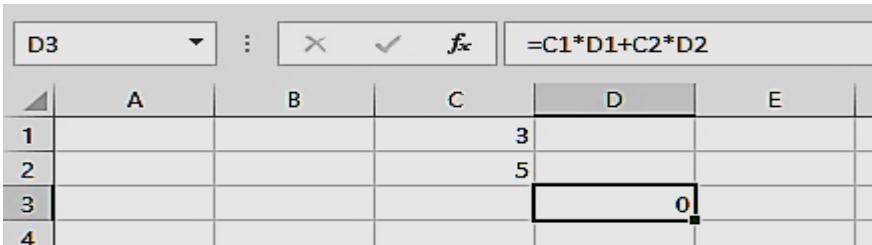
La primera tarea será definir, sobre una hoja de cálculo en blanco, o una que ya contenga los datos del problema, dos aspectos iniciales:

- 1) Cuál deseamos que sea la celda en la cual estará la función objetivo. Esa celda la llamaremos de ahora en adelante “**Celda objetivo**”.
- 2) Cuáles serán las celdas destinadas a las variables. Al ser una celda por variable de decisión, conformarán un grupo de celdas (“Rango” o matriz) donde aparecerán los valores que asumen las variables una vez resuelto el problema. En la terminología de *Excel* constituirán un “*rango de celdas cambiantes*”.

En las figuras siguientes¹¹, hemos comenzado el planteo del problema en una hoja en blanco, en la cual elegimos las celdas de esta manera: la **D1** para la variable x_1 , **D2** para la variable x_2 y **D3** para la función objetivo, cuya expresión se puede ver arriba, en la barra comandos. Además, se han escrito los valores de los coeficientes del funcional en las celdas **C1** y **C2**: (figura superior MS Office/Excel, Inferior OOffice o LOficce/Calc)

¹⁰ Las ilustraciones que acompañan este artículo se obtuvieron de Excel Versión Office 2016 operando con Windows 10. Las imágenes y configuraciones pueden variar con otros sistemas operativos y con otras versiones del programa. Las correspondientes a *Calc* son las de la versión de LibreOffice 5 bajo Windows 10

¹¹ La manera de plantear el modelo y resolverlo es totalmente personal, se optó por un diseño cualquiera en la Hoja. Puede ser usada cualquier otra disposición alternativa. Es conveniente que el lector ensaye luego con otros diseños.



Escribiremos la función objetivo en la celda **D3** optando por una de las cuatro maneras totalmente equivalentes que mostramos a continuación:

- =C1*D1+C2*D2
- = $\$C\$1*\$D\$1+\$C\$2*\$D\2
- =3*D1+5*D2
- =SUMA.PRODUCTO($\$C\$1:\$C\$2;\$D\$1:\$D\2)

El problema queda así planteado como una función de las variables representadas por las celdas **D1** y **D2**. Como ensayo, podríamos probar distintos valores para cada variable (escribiéndolos en **D1** y **D2**) y observar en **D3** el valor que adquiere el funcional. En las figuras vemos que la sintaxis en Excel (figura de arriba) es idéntica a Calc (figura inferior).

Para completar el planteo del modelo, primero agregaremos algunos elementos que son solamente accesorios, como un color para identificar rápidamente la celda objetivo, etiquetas de ayuda ("**<X1**" para recordar donde va a aparecer el valor de x_1 , por ejemplo, o "**producción**" para recordar en que renglón está la restricción) etc. Todo esto se incorporó en la figura siguiente:

	A	B	C	D	E
1			3		<x1
2			5		<x2
3			Z=	0	
4					
5					
6		restricciones		valores lado	derecho
7	producción		<=	230	
8	rectificado		<=	250	
9	demanda		<=	120	
10					
11					

En casi todas estas celdas sólo se escribieron textos, así en **C7**, **C8** y **C9**, solo se escribió “<=”, como un símbolo de ayuda que no se puede operar. Pero la columna de valores del lado derecho son números (**D7**, **D8** y **D9**).

En el siguiente paso completaremos las celdas **B7**, **B8** y **B9**, con funciones:

=**2*D1 + D2** en la B7 (equivale a $2*x_1 + 1*x_2$)

=**D1+2*D2** en la B8 (equivale a $1*x_1 + 2*x_2$)

=**D2** en B9 (equivale a $0*x_1 + 1*x_2$)

Problema completo planteado en Excel y/o Calc

De esta manera tenemos todos los datos necesarios incorporados y el modelo escrito en la hoja de cálculo. Los datos que hemos agregado a la hoja son:

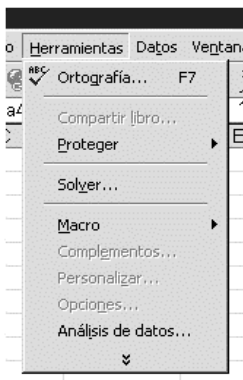
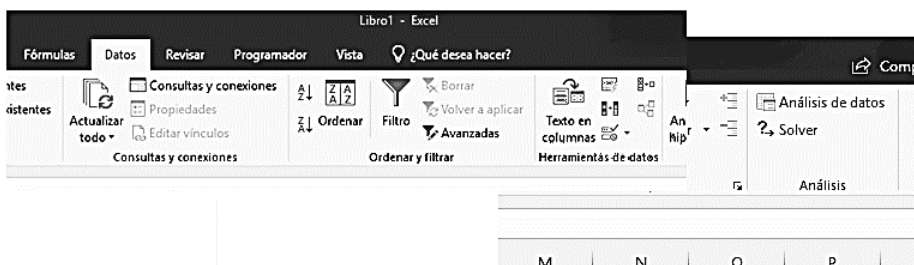
1. Función objetivo.
2. El valor inicial de las variables x_1 y x_2 (en blanco, o cero).
3. Las funciones de las inecuaciones (lados izquierdos)
4. Las disponibilidades (lados derechos).

(Observe que el sentido de las desigualdades (“<=”), si bien lo hemos incorporado, no tiene valor y podría no escribirse. Lo que obligatoriamente tiene que estar es lo enumerado arriba).

El siguiente paso será utilizar *Solver*. Puede ocurrir que, en el primer intento de uso, descubra que la versión de Excel que Ud. usa no incluye *Solver*. Esto puede ocurrir porque, cuando se instala Excel o MS Office, *Solver* no se incluye por defecto en la modalidad de opciones recomendadas por el fabricante. En ese caso, para cargar *Solver* deberá un simple procedimiento que varía según la versión de Excel que utilice.

UNA GUIA SENCILLA DE INSTALACIÓN DE SOLVER PARA EXCEL EN TODAS LAS VERSIONES SE ENCUENTRA AL FINAL DE ESTE CAPÍTULO (ANEXO DEL CAPÍTULO)

Una vez que verificó que lo tiene instalado — o lo instaló, dispondrá de las opciones mostradas en la figura superior siguiente para Office Excel 2007/10 y en la inferior para todas las versiones anteriores de Excel:

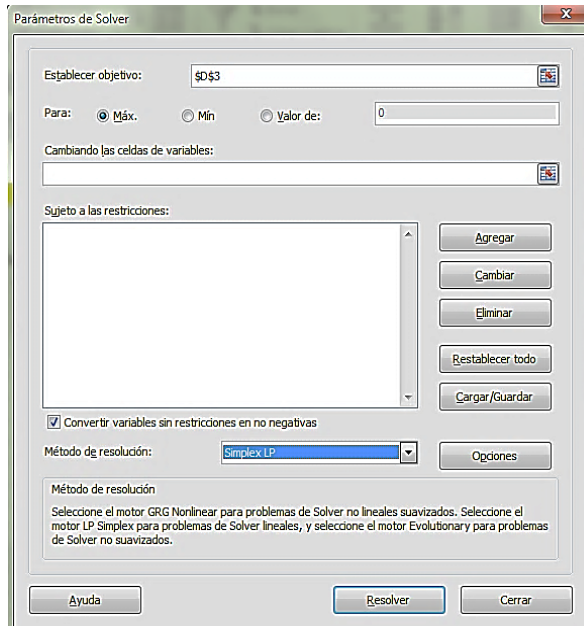


Cuando seleccionamos “Solver” aparece una pantalla similar a las figuras que se señalan a continuación, según la versión o programa que estemos usando:

- 1) **Excel hasta 2007** inclusive (puede haber pequeñas variaciones en las traducciones de los textos y aspecto en las versiones más antiguas)



2) Excel 2010 y posteriores



3) Calc 3

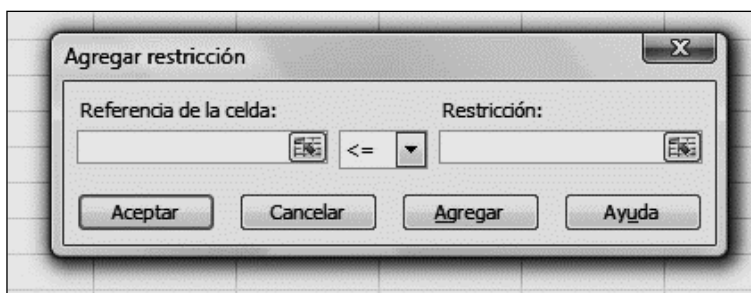


Como se puede ver, hay que indicar cuál es la celda objetivo, (en este caso **D3**) y marcar el criterio: que significa si se maximiza, se minimiza o se fuerza a un resultado.

Carga del modelo en Excel

El sector etiquetado “*Cambiando las celdas...*” requiere se ingrese el rango de la matriz de celdas donde están las variables, en este caso es un vector de 2 elementos (**D1** y **D2**). Por lo cual el rango comienza en **D1** y termina en **D2**, (se escribe **D1:D2**)

Sigue un recuadro para restricciones, (originalmente aparece en blanco). Para cargar cada restricción se debe pulsar el botón “**Agregar**” Aparecerá el cuadro de la figura:



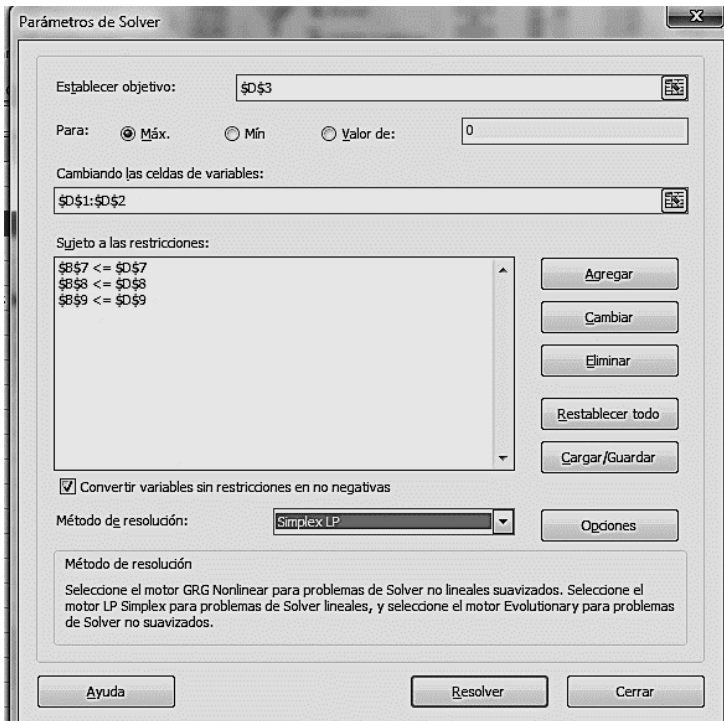
En la casilla

“**Referencia de la celda**”, se escribe el nombre de la celda que representa el lado izquierdo de la restricción o la variable a restringir. En la casilla central el tipo de restricción, al que se accede desplegando la flecha vertical y optar por **<=** (opción por defecto), **=**, **>=**, **int** (entera) o **bin** (binaria). De esta manera es posible elegir una de las tres relaciones básicas (**igual a**, **menor o igual a**, **mayor o igual a**) o forzar a un número entero irrestricto (**int**) o binario (**bin**).

Por último, la casilla derecha servirá para escribir el lado derecho de la restricción. Si se seleccionó **int** o **bin**, allí aparecerá la palabra **ENTERO** o **BINARIO** respectivamente y no hay que escribir nada.

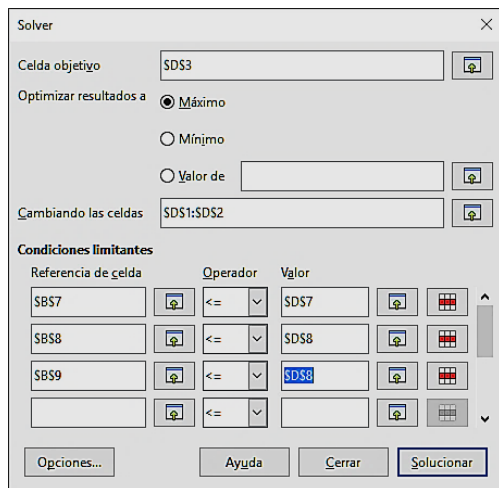
Cada restricción se carga apretando el botón **Agregar**. Cuando se escribieron todas, y estamos en la última, en lugar de **Agregar** se pulsa **Aceptar**. Si hay que modificar alguna, se pulsa **Cambiar**. Si hay que borrar alguna, se pulsa **Eliminar**.

El aspecto del cuadro **Solver** después de cargar las restricciones, será:



Carga del modelo en Calc

El sector etiquetado “**Cambiando las celdas**” requiere se ingrese el rango de la matriz de celdas donde están las variables, en este caso esa matriz es un vector de 2 elementos (**D1** y **D2**). Por lo cual el rango comienza en **D1** y termina en **D2**, (se escribe **D1:D2**). El sector “**Condiciones limitantes**” se destina a los rangos donde están las funciones del lado izquierdo, el sentido de la desigualdad, igual que en Excel (**<=**, **>=**, **=**, **entero**, **binario**) y el rango donde está el valor derecho. Así para cada restricción.



Resolver el modelo en Excel y en Calc

Antes de hacer clic en “**Resolver**” (Excel) o “**Solucionar**” (Calc), se debe seguir uno de estos pasos:

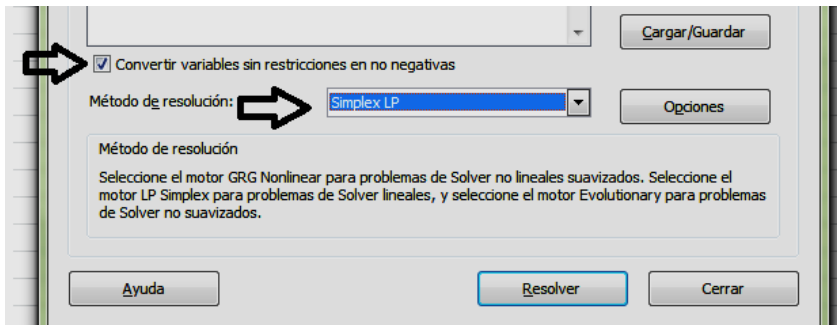
a) **Para Excel, todas las versiones desde 95 a 2007, inclusive:** hacer clic en el botón **Opciones**¹², con lo cual aparecerá el cuadro de diálogo de la figura.



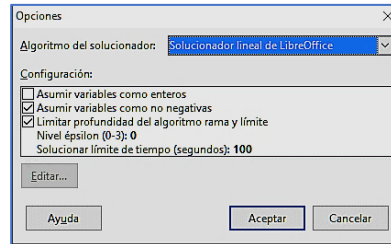
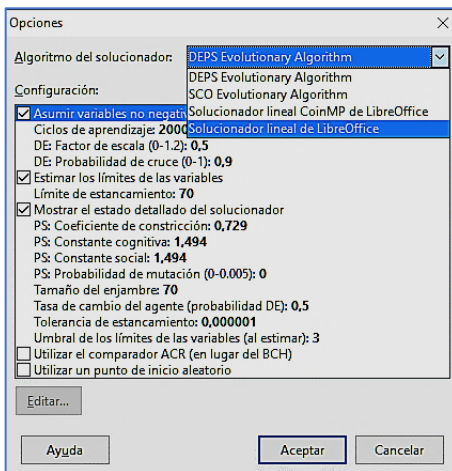
Si bien allí podríamos establecer el tiempo máximo de búsqueda, el error, la tolerancia y el modelo de resolución, en general esos parámetros se dejan como están por defecto. Pero lo que es sí es necesario hacer es marcar las casillas de verificación “**Adoptar Modelo lineal**” y “**Adoptar no negativos**” para los problemas de Programación lineal. (En el caso de la condición de no negatividad, si esto no se hiciera, habría que establecer la condición de no negatividad como restricción para cada una de las variables de decisión). Una vez hecho, se pulsa “**Aceptar**”

b) **Para Excel 2010 y posteriores,** en la lista desplegable “**Método de resolución**” elegir la opción “**Simplex LP**” y convertir en no negativas las variables sin restricciones, como mostramos en la figura.

¹² Ver al final de este capítulo, en *Resultados adicionales en Excel 2010* que otras posibilidades brinda el botón **Opciones** en Excel 2010



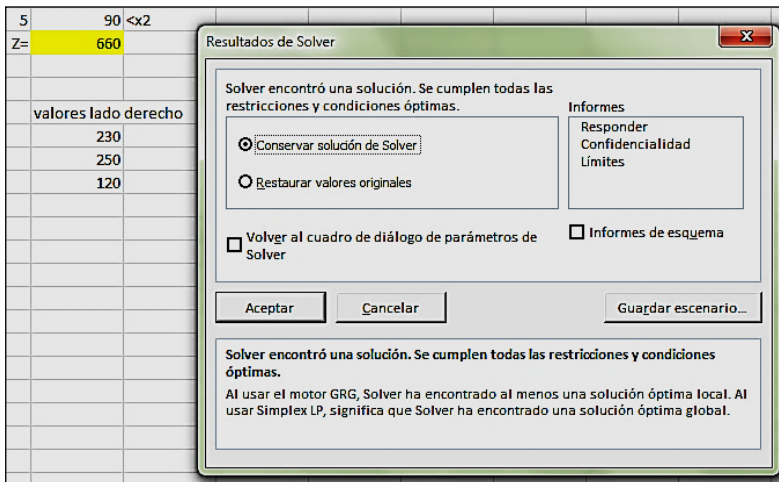
c) En Calc LibreOffice, pulsar “Opciones...” seleccionar “Solucionador Lineal de LibreOffice” Con ello, la lista de configuraciones que sigue por debajo cambiará (como se ve en la segunda figura). En ella hay que tildar “Asume variables como no negativas” y pulsar “Aceptar”



Resultados en Excel

En este punto estamos en condiciones de terminar la tarea, simplemente oprimiendo el botón “Resolver”. En Excel¹³, aparecerán las siguientes pantallas.

¹³ A partir de este punto, solo se muestran pantallas correspondientes a las versiones actuales de Excel ya que las diferencias que hay sobre las versiones anteriores de 2013 son menores y, en general, se concentran en errores de traducción y de cambios de nombres de los elementos.



Vemos un mensaje que nos informa si la búsqueda fue o no satisfactoria, a la vez que, en segundo plano, sobre la hoja, en las celdas **D1**, **D2** y **D3** ya se ven los resultados de la función objetivo, de la variable x_1 , de la variable x_2 y de Z , respectivamente y en las celdas **B7**, **B8** y **B9** aparecen los valores del lado izquierdo de las restricciones (fuera del cuadro de la figura) que indican, directamente, cuanto “sobra” en cada recurso .

En esta ventana vemos – además – un sector denominado **Informes**: con un listado de tres posibilidades, **Respuestas** o **Responder** (en 2010), **Sensibilidad** o **Confidencialidad** (en 2010) y **Límites**. Haciendo clic en cualquiera de ellas, ésta queda “iluminada” (pueden “iluminarse” una, dos o las tres) lo que provoca que, una vez que pulsamos **Aceptar** se generen en el libro tantas hojas nuevas como Informes marcamos. Estas hojas se acumulan cada vez que se usa Solver en el mismo libro. Cada hoja tendrá un nombre, por ejemplo “**Informe de Respuestas**” al que se le agregará automáticamente un número correlativo cada vez que se cree una nueva hoja informe. Con eso se puede formar un “historial” de resultados.

En este caso “iluminaremos” las tres. Luego pulsaremos “**Aceptar**”.

Las figuras siguientes muestran cada una de esas hojas y las diferencias entre todas las versiones anteriores de Excel y la actual:

1) **Informe de Respuestas**

Los términos “Demora” y “Vinculante” se refieren a los valores del lado izquierdo y a las variables básicas, respectivamente.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 14.0 Informe de respuestas								
2	Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1								
3	Informe creado: 16/04/2011 15:54:21								
4	Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.								
5	Motor de Solver								
6	Motor: Simplex LP								
7	Tiempo de la solución: 0,016 segundos.								
8	Iteraciones: 3 Subproblemas: 0								
9	Opciones de Solver								
10	Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precisión 0,000001								
11	Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo								
12									
13									
14	Celda objetivo (Máx.)								
15	<u>Celda</u>	<u>Nombre</u>	<u>Valor original</u>	<u>Valor final</u>					
16	\$D\$3	Z=	660	660					
17									
18									
19	Celdas de variables								
20	<u>Celda</u>	<u>Nombre</u>	<u>Valor original</u>	<u>Valor final</u>	<u>Entero</u>				
21	\$D\$1		70	70	Continuar				
22	\$D\$2		90	90	Continuar				
Restriciones									
	<u>Celda</u>	<u>Nombre</u>	<u>Valor de la celda</u>	<u>Fórmula</u>	<u>Estado</u>	<u>Demora</u>			
	\$B\$7	Producción restricciones	230	\$B\$7<=\$D\$7	Vinculante	0			
	\$B\$8	Rectificado restricciones	250	\$B\$8<=\$D\$8	Vinculante	0			
	\$B\$9	Demanda restricciones	90	\$B\$9<=\$D\$9	No vinculante	30			

2) Informe de sensibilidad o de confidencialidad

La terminología empleada es la siguiente: “Final Valor” que quiere señalar “Valor Final”; “Reducido coste” traducción literal de “*Reduced Cost*”, “Objetivo coeficiente” para señalar los coeficientes de la función objetivo, “Sombra precio” es el Precio sombra y, “Permisible Aumentar” – “Permisible Reducir” señalan los límites de aumento o disminución permitidos para el valor del coeficiente¹⁴.

¹⁴ como dato curioso, los vocablos “Permisible Aumentar” y “Permisible Reducir” vienen a corregir un error de décadas, ya que, en las versiones anteriores de Excel, ambas columnas se señalaban con “Aumento permisible”, iguales las dos, dando lugar a posibles errores de interpretación.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad							
2	Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1							
3	Informe creado: 16/04/2011 15:54:22							
4								
5								
6	Celdas de variables							
7			Final	Reducido	Objetivo	Permissible	Permissible	
8	Celda	Nombre	Valor	Coste	Coficiente	Aumentar	Reducir	
9	\$D\$1		70	0	3	7	0,5	
10	\$D\$2		90	0	5	1	3,5	
11								
12	Restricciones							
13			Final	Sombra	Restricción	Permissible	Permissible	
14	Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir	
15	\$B\$7	Producción restricciones	230	0,333333333	230	270	90	
16	\$B\$8	Rectificado restricciones	250	2,333333333	250	45	135	
17	\$B\$9	Demanda restricciones	90	0	120	1E+30	30	
18								

3) Informe de límites

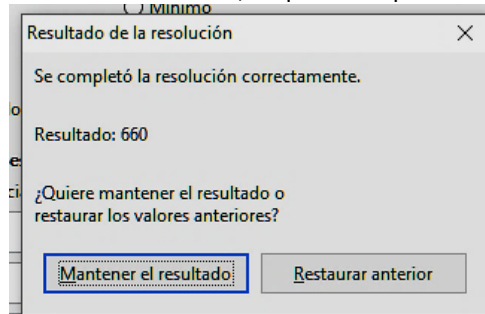
Microsoft Excel 14.0 Informe de límites							
Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1							
Informe creado: 16/04/2011 15:54:22							
Objetivo							
Celda	Nombre	Valor					
\$D\$3	Z=	660					
Variable							
Celda	Nombre	Valor	Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo	
			Límite	Resultado	Límite	Resultado	
\$D\$1		70	0	450	70	660	
\$D\$2		90	0	210	90	660	

Esta planilla muestra la contribución que hace cada variable cuando pasa del valor inicial (cero, en este caso) al valor final (70 o 90). Cuando la variable X_1 (**\$D\$1**) está en cero, la función objetivo vale 450 (que es $5 * X_2 = 5 * 90$) y cuando la variable X_2 está en cero el resultado es $3 * X_1$; $3 * 70 = 210$. Cuando ambas variables están en su valor final, Z vale 660 para ambas.

Tengamos en cuenta que cada vez que se corre *Solver* se conservan los valores de la corrida anterior, por lo cual es posible ir efectuando análisis progresivos sin pérdida ni de datos ni de trabajo. Para cada corrida abrirá hojas nuevas de informes, conservando las anteriores, por lo que puede analizar por comparación las variaciones de los resultados.

Resultados en Calc

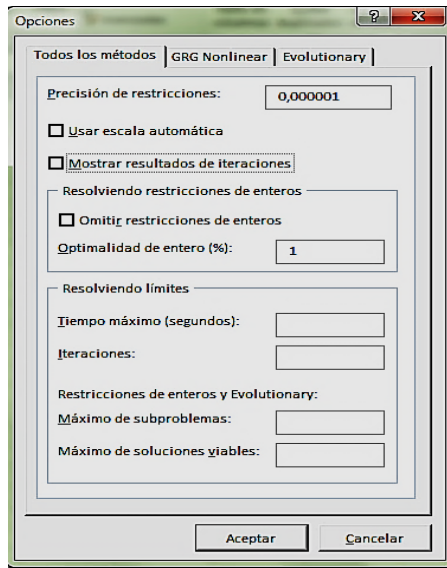
En Calc debe pulsarse el botón **Solucionar**, lo que hará aparecer la siguiente ventana:



En ella se muestra un mensaje de búsqueda satisfactoria y la opción de mantener o no los resultados, los cuales el operador podrá ver en su pantalla en segundo plano sobre la hoja de cálculo. En Calc no existen análisis de sensibilidad ni hojas de resultados.

Resultados adicionales en Excel

Si se opta por pulsar el botón “**Opciones**” en la ventana de carga de *Solver* 2010 y posteriores, aparece el cuadro de diálogo separado en pestañas que se muestra en la figura.



Como vemos, hay tres solapas. La única que se aplica al método elegido (Simplex LP) es la que aparece por defecto [**Todos los métodos**].

Lo interesante en este caso, es la posibilidad de marcar la casilla “**Mostrar resultados de iteraciones**”. Si se acepta y luego se pulsa **resolver**, en lugar de ir directamente al final aparecerán informaciones como las que se muestran en la sucesión de figuras siguientes. Se puede ver que, en cada caso, se ve en la hoja la solución del vértice al que se evolucionó, primero al vértice **B (0; 120)**, luego el **C (10; 120)** y por último el **D (70; 90)**

VERTICE B

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		3	0	<x1					
		5	120	<x2					
		Z =	600						
		s _j							
Produccion		120	<=	230					
Rectificado		240	<=	250					
Demanda		120	<=	120					

Mostrar solución de prueba

Solver se detuvo. Los valores de la solución actual se muestran en la hoja de cálculo.

Continuar Detener Guardar escenario...

VERTICE C

B	C	D	E	F	G	H	I	J
	3	10	<x1					
	5	120	<x2					
	Z =	630						
	sj							
Produccion	140	<=	230					
Rectificado	250	<=	250					
Demanda	120	<=	120					

Mostrar solución de prueba

Solver se detuvo. Los valores de la solución actual se muestran en la hoja de cálculo.

Continuar Detener Guardar escenario...

VERTICE D

B	C	D	E	F	G	H	I	J
	3	70	<x1					
	5	90	<x2					
	Z =	660						
	sj							
Produccion	230	<=	230					
Rectificado	250	<=	250					
Demanda	90	<=	120					

Mostrar solución de prueba

Solver se detuvo. Los valores de la solución actual se muestran en la hoja de cálculo.

Continuar Detener Guardar escenario...

PHP Simplex


Es un solucionador que funciona exclusivamente en la internet y que centra su utilidad en la posibilidad de obtener soluciones rápidas y sencillas en caso de no tener a mano o contar con herramientas completas como las vistas.

Accedemos al sitio www.phpsimplex.com y veremos una pantalla minimalista y con publicidad como se muestra en la figura.

PHPSimplex

Ayuda Salir Me gusta 2242

PHPSimplex



Método: Simplex / Dos Fases

¿Cuántas variables de decisión tiene el problema?

¿Cuántas restricciones?

Continuar

En esa pantalla ingresamos el criterio, el número de variables y el de restricciones. Al pulsar en “Continuar” se pueden cargar las constantes del problema, tal como mostramos en la figura siguiente:

La novedad aparece en la siguiente pantalla, que permite ver u ocultar detalles del procedimiento, tales como variables *slacks* o artificiales agregadas y la forma dual. Luego es posible optar por ir directamente a la solución o recorrer cada tabla intermedia del Simplex.

PHPSimplex

Salir Me gusta 2242

PHPSimplex

¿Cuál es el objetivo de la función? Maximizar

Función: 3 X1 + 5 X2

Restricciones:

2 X1 + 1 X2 ≤ 230

1 X1 + 2 X2 ≤ 250

0 X1 + 1 X2 ≤ 120

X1, X2 ≥ 0

PHPSimplex

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda ([mostrar/ocultar detalles](#))

- Como la restricción 1 es del tipo "≤" se agrega la variable de holgura X3.
- Como la restricción 2 es del tipo "≤" se agrega la variable de holgura X4.
- Como la restricción 3 es del tipo "≤" se agrega la variable de holgura X5.

MAXIMIZAR: $Z = 3 X_1 + 5 X_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2 X_1 + 1 X_2 &\leq 230 \\ 1 X_1 + 2 X_2 &\leq 250 \\ 0 X_1 + 1 X_2 &\leq 120 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

MAXIMIZAR: $Z = 3 X_1 + 5 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 &= 230 \\ 1 X_1 + 2 X_2 + 1 X_4 &= 250 \\ 0 X_1 + 1 X_2 + 1 X_5 &= 120 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a construir la primera tabla del método Simplex.

PHPSimplex

Inicio Teoría Ejemplo Ayuda Salir Me gusta 2242

Método Simplex

Tabla 1			3	5	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5
P3	0	230	2	1	1	0	0
P4	0	250	1	2	0	1	0
P5	0	120	0	1	0	0	1
Z		0	-3	-5	0	0	0

Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P3 y la que entra es P1.

La figura anterior muestra la Tabla 1 del Simplex. Los valores se pueden visualizar como fracciones marcando la opción inferior izquierda.

Además, en cada tabla siguiente es posible acceder a las operaciones intermedias.

Operaciones intermedias (mostrar/ocultar detalles)

Fila pivote (Fila 3):
 $120 / 1 = 120$
 $0 / 1 = 0$
 $1 / 1 = 1$
 $0 / 1 = 0$
 $0 / 1 = 0$
 $1 / 1 = 1$

Fila 1:
 $230 - (1 * 120) = 110$
 $2 - (1 * 0) = 2$
 $1 - (1 * 1) = 0$
 $1 - (1 * 0) = 1$
 $0 - (1 * 0) = 0$
 $0 - (1 * 1) = -1$

Fila 2:
 $250 - (2 * 120) = 10$
 $1 - (2 * 0) = 1$
 $2 - (2 * 1) = 0$
 $0 - (2 * 0) = 0$
 $1 - (2 * 0) = 1$
 $0 - (2 * 1) = -2$

Fila Z:
 $0 - (-5 * 120) = 600$

Método Simplex

Operaciones intermedias (mostrar/ocultar detalles)

Tabla 4				3	5	0	0	0
Base	C _b	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
P ₃	0	30	0	0	0.333333333333333	-0.666666666666667	1	0
P ₁	3	70	1	0	0.666666666666667	-0.333333333333333	0	0
P ₂	5	90	0	1	-0.333333333333333	0.666666666666667	0	0
Z		660	0	0	0.333333333333333	2.33333333333333	0	0

Mostrar resultados como fracciones.

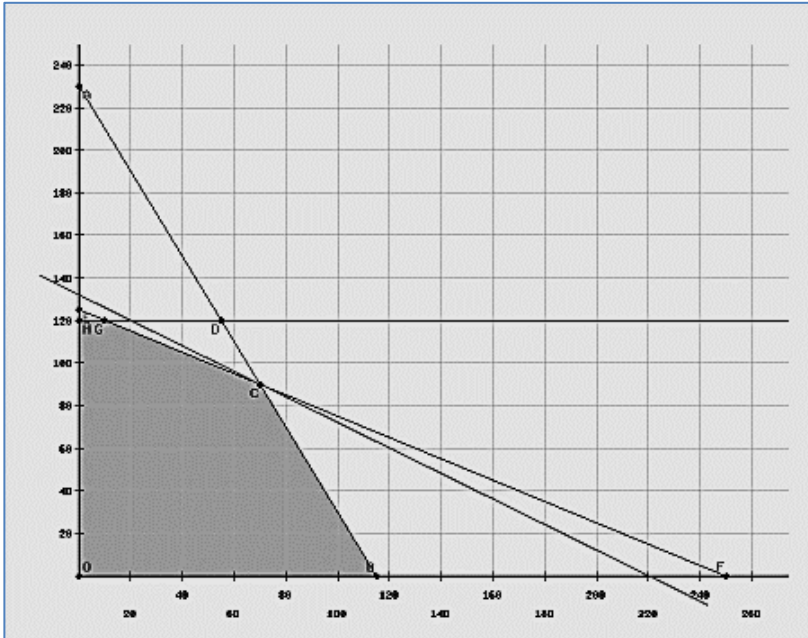
La solución óptima es Z = 660
 $X_1 = 70$
 $X_2 = 90$

Resolver mediante el método Gráfico

Como se ve en la pantalla final anterior, existe la posibilidad de “Resolver” mediante el método gráfico, que produce un resultado interesante y completo:

Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	230	1150
B	115	0	345
C	70	90	660
D	55	120	765
E	0	125	625
F	250	0	750
G	10	120	630
H	0	120	600

Sector inferior de la pantalla de resultados del método gráfico mostrando la tabla de todos los vértices de la SFB y los no factibles.



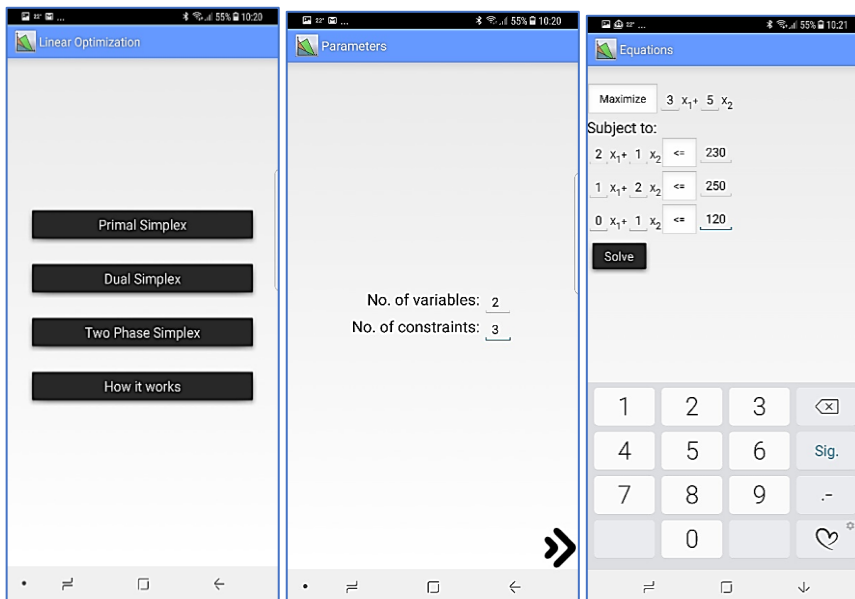
Aplicaciones Android

Existen varias aplicaciones para *smartphones* y *tabletas* que funcionan con sistema operativo Android. Todas son muy similares entre sí con pequeñas diferencias en estética, algunas funcionalidades y seguridad de funcionamiento. Se han analizado algunas, que se describen en este apartado. Todas ellas fueron obtenidas en la tienda oficial Android (*Play Store*) y funcionaron correctamente. No se incluyen las que presentaron fallas o imprecisiones.

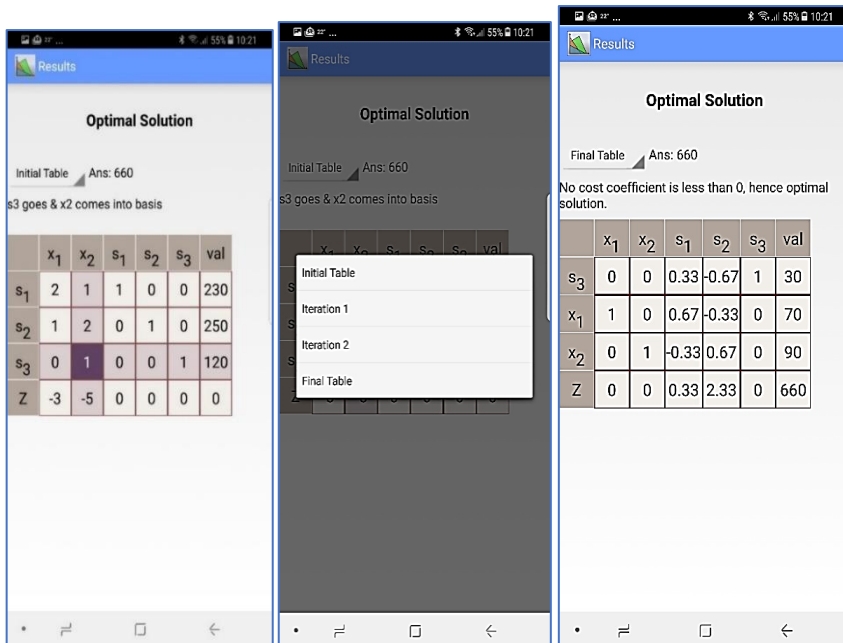
Linear Optimization



Es un programa muy confiable y simple que se obtiene en *Play Store*. Las siguientes capturas de pantalla muestran cómo se opera. Se debe seleccionar la carga dual o primal ya que no se puede cambiar automáticamente de una a otra ni tampoco muestra la otra forma. Es la aplicación más elemental de las probadas, pero funciona muy bien sin agregar ningún elemento sofisticado. Fue una de las primeras ofrecida en Android y sigue vigente:



Pantallas de “*Linear Optimization*”: Izquierda, de bienvenida; Centro de definición del modelo y derecha, de carga del modelo.

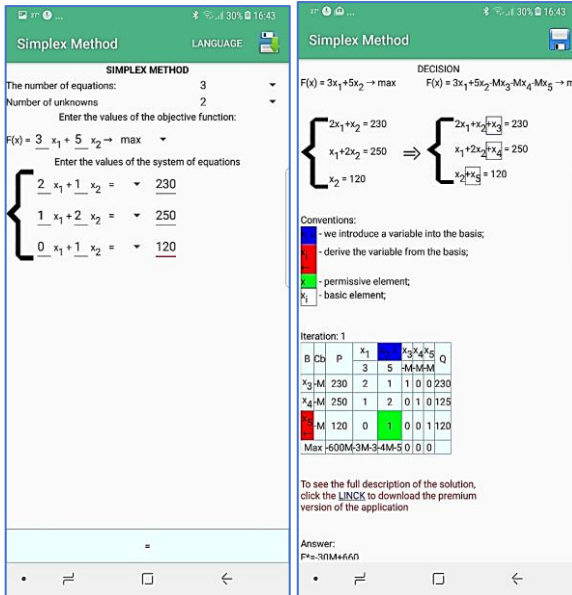


Pantallas de resultados de "Linear Optimization": izquierda, por defecto aparece la primera tabla Simplex. Pulsando en el desplegable "Initial Table" se puede acceder a cualquier otra tabla (Centro) o directamente a la tabla final (Derecha)

Simplex Method

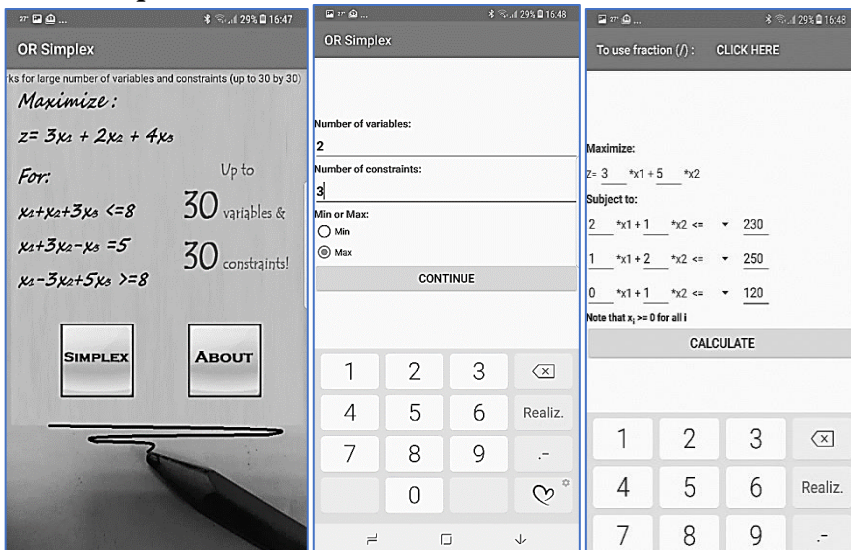


"Simplex Method" ofrece una versión paga y una gratuita (Free). Su característica sobresaliente que la hace favorita (es una rareza en el mundo de Play Store ya que está puntuada con cinco estrellas sobre cinco por los usuarios) es que tiene elementos didácticos en cada una de las pantallas y presenta por defecto el dual. La versión paga complementa todos estos aspectos y ofrece todas las tablas simplex simultáneamente en la misma pantalla. Como la versión paga es de muy bajo precio, es recomendable. Ambas versiones son, sin duda, una opción interesante



Carga de datos (izq.) y resultados con información sobre dual, variables agregadas y tablas del Simplex (derecha). Como se ve, el programa es simple y efectivo.

OR Simplex



Pantalla de presentación de OR Simplex (Izq.); de definición del problema (centro) y de carga de datos (derecha)

Se destaca porque promete trabajar hasta con matrices de 30 x 30, la posibilidad de usar fracciones tanto en carga de datos como en presentación de resultados, por presentar todas las tablas Simplex por defecto sin necesidad de llamarlas una por una como en la mayor parte de las aplicaciones y programas y por ser gratuita con muy buen soporte vía e-mail.

Initial values:

	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	-3	-5	0	0	0	0
S1	2	1	1	0	0	230
S2	1	2	0	1	0	250
S3	0	1	0	0	1	120

The start table:

	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	-3	-5	0	0	0	0
S1	2	1	1	0	0	230
S2	1	2	0	1	0	250
S3	0	1	0	0	1	120

Iteration: 1

	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	-3	0	0	0	5	600
S1	2	0	1	0	-1	110
S2	1	0	0	1	-2	10
X2	0	1	0	0	1	120

Iteration: 2

	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	0	0	0	3	-1	630
S1	0	0	1	-2	3	90
X1	1	0	0	1	-2	10
X2	0	1	0	0	1	120

Iteration: 3

	X1	X2	S1	S2	S3	BFS
Z	0	0	1/3	7/3	0	660
S3	0	0	1/3	2/3	1	30
X1	1	0	2/3	1/3	0	70
X2	0	1	-1/3	2/3	0	90

The optimal solution is:

Z = 660
X1 = 70
X2 = 90
S1 = 0
S2 = 0
S3 = 30

Resultados en OR Simplex: una sola y muy larga pantalla con las tablas Simplex y los valores de la base y de Z al final de todo...

APÉNDICE AL CAPÍTULO 4

Guía de instalación de Solver para todas las versiones de planilla de cálculo

Esta guía se aplica a las diferentes versiones de Excel, según el cuadro siguiente y a Calc. En general en la ayuda y en los foros de usuarios o desarrolladores no hay referencias a *Solver/Resolvedor* o a su instalación. En www.optimiza.org podrá encontrar ayuda adicional.

La opción SOLVER EXCEL se encuentra:

- EXCEL VERSIONES 5 / 95 Y ANTERIORES: en el menú "**Herramientas**", como una de las opciones directas del menú.
- EXCEL 97/98: En el mismo menú herramientas que las anteriores.
- EXCEL 2000/XP/2003 en la pestaña "**Datos**", en el grupo final a la derecha ("**Análisis**") como un ícono etiquetado "**Solver**"

Si no encuentra en su instalación de Office lo señalado arriba, proceda de la siguiente manera:

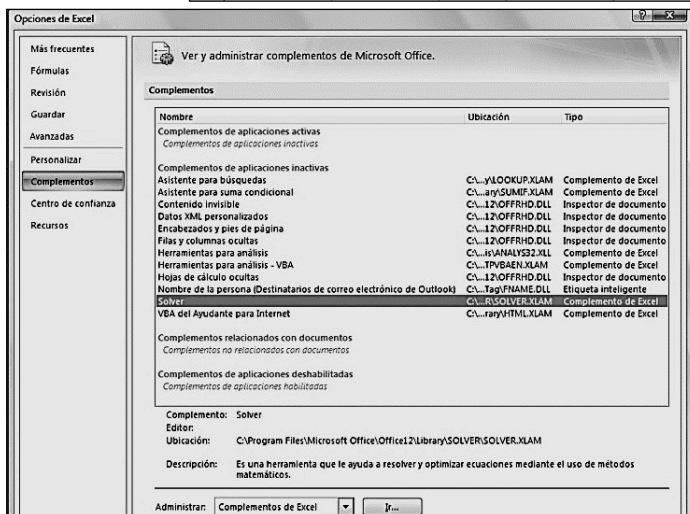
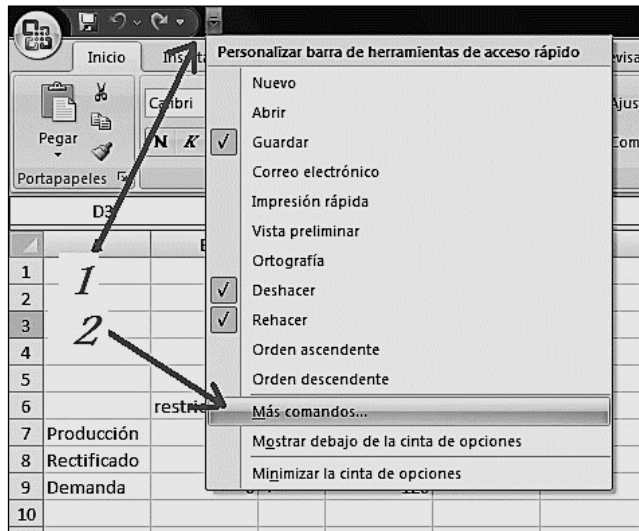
<ul style="list-style-type: none">• Versiones anteriores a la versión 5, Excel 5, Excel 95: Debe volver a instalarse Excel y habilitar la opción "<i>Agregar/eliminar componentes instalados</i>". Buscar el cuadro de verificación "<i>Solver</i>" y marcarlo. Luego debe seguirse las instrucciones de pantalla.• Versiones Office Excel 97 y 98: Se deben cargar en <i>Complementos</i> o en <i>Herramientas</i> las "<i>Herramientas de Análisis</i>" y habilitar la opción "<i>Solver</i>". Si la opción "<i>Herramientas de Análisis</i>" no está disponible, proceder de acuerdo a lo indicado en NOTA IMPORTANTE..• Versiones Office Excel 2000, XP y 2003: Debe buscarse en <i>Herramientas</i>, <i>complementos</i> y marcar "<i>Solver</i>". Si no aparece, ver NOTA IMPORTANTE.
--

NOTA IMPORTANTE: Si estos pasos no dieran resultado, deberá reinstalar Excel en modo "Instalación personalizada" y habilitar la opción "Herramientas de Análisis" y/o "Complementos" y/o "Solver", según las versiones

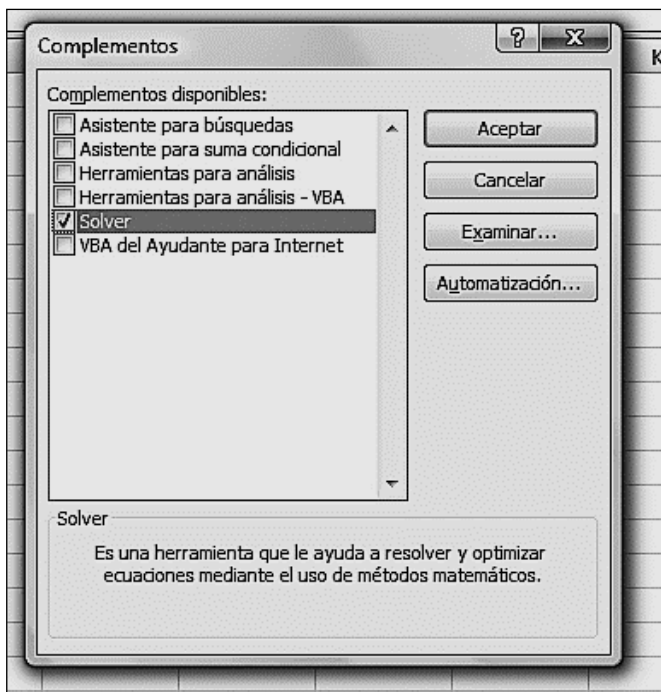
Versión Excel 2007:

Seleccione “Personalizar barra de herramientas de acceso rápido” y luego “Mas comandos...”

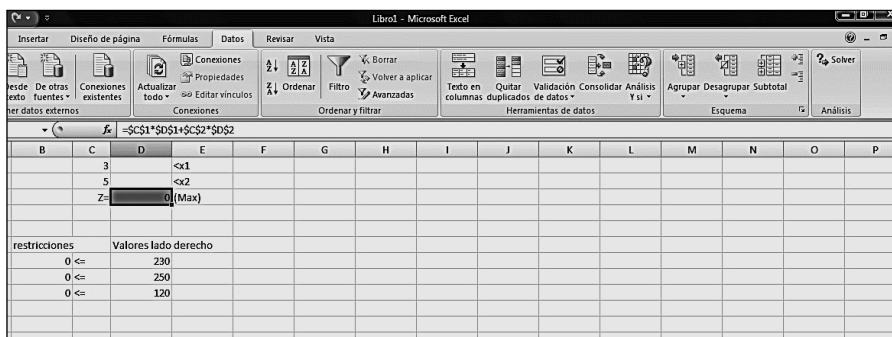
Seleccione “Complementos” y luego marque “Solver” y pulse el botón “I”



El siguiente paso será seleccionar con una marca de tilde la Opción Solver y aceptar:

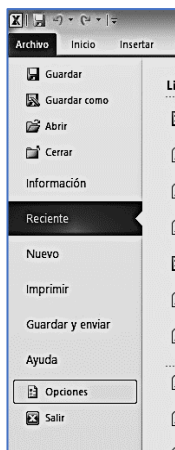


En la hoja de cálculo, en la solapa “**Datos**” aparecerá ahora el botón *Solver*:

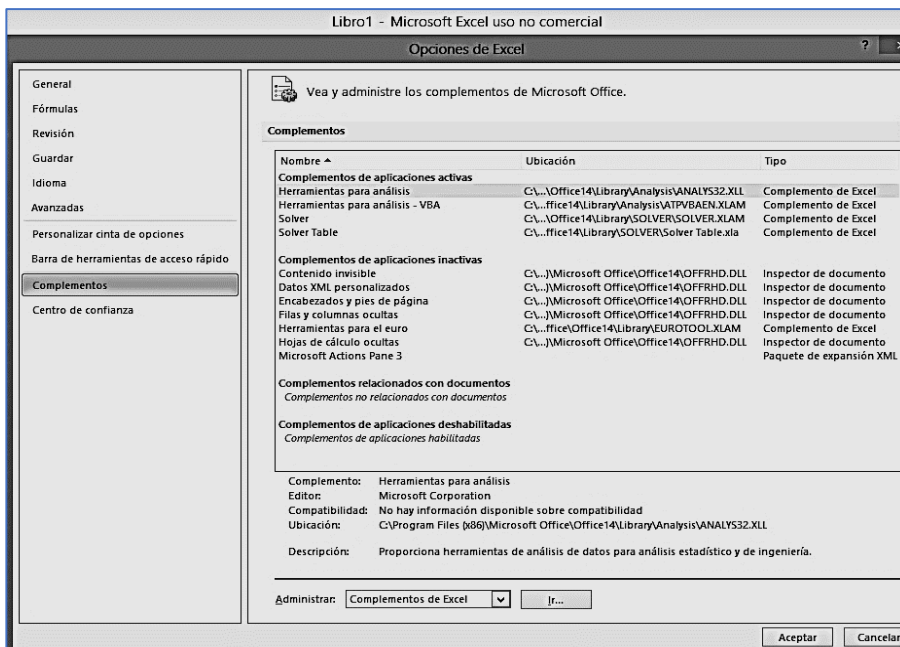


Versiones Excel 2010 y posteriores:

Seleccione “**Archivo**” / “**Opciones**”

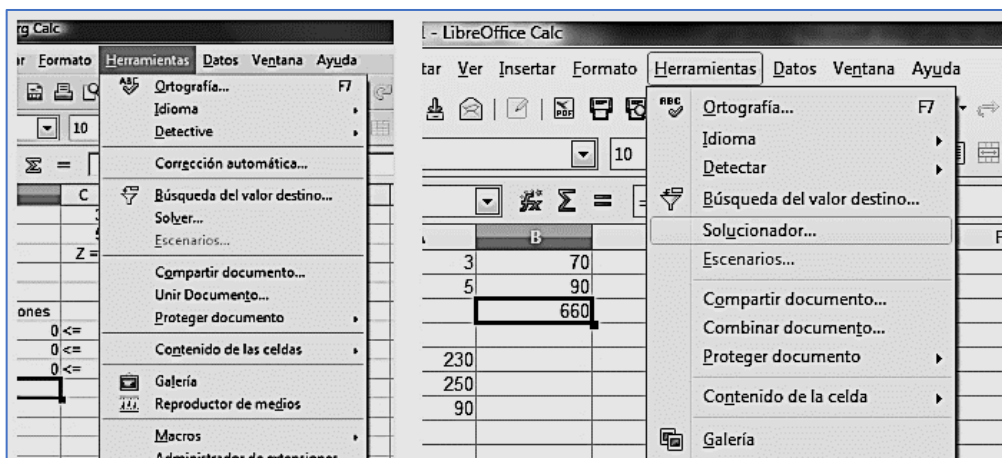


Seleccione **“Complementos”** y luego **“Solver”**. Si no existe seleccione **“Administrar”** (Abajo en la misma pantalla) **“Complementos de Excel”** y luego, en ambos casos, el botón **“ir”**. Luego seleccione **“Solver”**



Calc para OpenOffice.org y para LibreOffice

Si utiliza Calc. deberá verificar que existe la opción “**Solver**” o “**Solucionador**” en el menu Herramientas. Las figuras que siguen corresponden a OpenOffice (izquierda) y LibreOffice (Derecha)

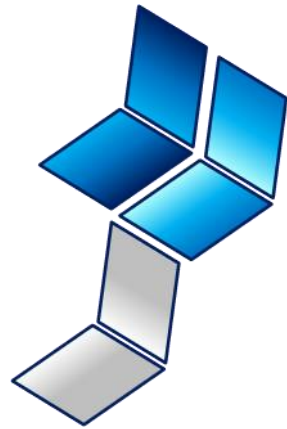


Si no aparece puede deberse a que la versión en uso no es la 3 o superior o que la versión 3 instalada no fue realizada en la modalidad “Instalación Completa”.

En todo caso puede instalar Solver como un complemento que se obtiene en el sitio del desarrollador o bien actualizar a la versión 3 o superior (gratuita), cuidando instalar la versión Completa.

Puede ocurrir que la versión instalada no funcione por falta de la instalación de entorno Java en el equipo, lo que puede solucionarse visitando www.java.com/es/ y siguiendo las instrucciones de la página.





Capítulo 5.

Programación Lineal Entera. El problema de transporte. Redes simples.

Con el nombre genérico "*Problema de transporte*" o de "*Programación lineal entera*", se conoce un subconjunto de problemas que se pueden solucionar con programación lineal, pero que difieren de lo visto en los capítulos anteriores, en que, al ser un modelo de redes y tener un campo de aplicación más acotado y simplificado, merecen un tratamiento específico, ya que, una de las características de estos casos, es que aparecen restricciones de variables enteras, lo que hace que usar manualmente el método Simplex se haga muy dificultoso. Por esta razón se desarrollaron métodos heurísticos capaces de encontrar con relativa facilidad soluciones satisfactorias.

Para describir el escenario típico del *problema de transporte*, vamos a suponer que tenemos un conjunto de oferentes, llamados “*orígenes*” o “*plantas*” u “*ofertas*”. Ellos deben distribuir sus existencias de productos, (bienes, elementos e, incluso, acciones, servicios) a otro conjunto que es de demandantes, llamados “*destinos*” o “*depósitos*” o “*demandas*”. La transferencia de unos a otros se hace utilizando “*rutas*” y con un “*costo*” (u obteniendo algún beneficio) por transportar cada unidad de esos productos de un punto al otro.

Si bien con esta descripción se tiene la impresión de que el método se circunscribe solamente a este tipo de problemas, veremos que, en realidad, el campo de aplicación del modelo es más amplio de lo que parece a simple vista

Terminología, aplicación y métodos a emplear

El conjunto de nodos desde donde parten las “*rutas*” o “*vínculos*” o “*flechas*” se denomina **orígenes** y está constituido por ***a*** nodos, de 1 hasta ***w***. El de los destinos, por ***b*** nodos, de 1 hasta ***u***. Las rutas que unen ambos conjuntos son ***j*** desde 1 hasta ***n***. El problema consiste generalmente en minimizar el costo de transportar determinada cantidad de unidades desde los orígenes a los destinos. También puede plantearse sobre esquemas de rutas apropiadas, tiempos mínimos, máximos volúmenes de carga por viaje, etc.

Se aplica a casos de traslado de mercaderías, programación de producción, nuevas plantas, programación de diversos centros de logística, entre otros casos. Es un problema de programación lineal que se caracteriza por la singularidad que presentan algunas de las restricciones. Para resolverlo hay varios modelos y métodos. Es posible solucionar estos problemas con el método Simplex, (lo que se discute más adelante, igual que la solución con Excel), pero hay que tener presente que puede ser más engorroso. El software de base, WinQSB, dispone de un módulo específico y muy simple, destinado a este tipo de problemas.

En síntesis, para comprenderlo mejor, hay que pensar el problema básico de programación entera como un caso de transporte: resolver como mover varias unidades desde los diversos orígenes a los diversos destinos usando las rutas disponibles, pagando el costo unitario de transporte que presenta cada una de esas rutas e incurriendo en el mínimo costo posible

Requisitos del problema

Tanto la función objetivo como las restricciones deben ser lineales, ya que es un caso particular de programación lineal. Si lo pensamos como que son mercaderías para distribución, para tener una imagen mental del concepto, entonces presuponemos uniformidad de elementos a transportar, que no son intercambiables y que son unidades¹⁵ (enteras). Lo fundamental es el concepto de UNIDAD a transportar: esto añade el nuevo requisito de variables enteras.

Otra condición (deseable, no obligatoria) es la igualdad de oferta y demanda, dicho de otra manera, la sumatoria de las capacidades de orígenes debe ser igual a la sumatoria de las capacidades de destinos (aunque esta suposición es fácil de modificar si se da el caso). Estos aspectos son los que distinguen al problema de transporte como un caso particular de la programación lineal.

Planteo general del problema

Nº de centros de oferta a (ORÍGENES): w

Nº de centros de demanda b (DESTINOS): u

Nº de rutas j entre orígenes y destinos: n

Nº de unidades disponibles en cada uno de los k orígenes: a_k ($k=1, \dots, w$)

Nº de unidades demandadas en cada uno de los j destinos: b_j ($j=1, \dots, u$)

Costo unitario de transporte de un origen k a un destino l : c_{kl}

Cantidad transportada de un origen k a un destino l : x_{kl}

Objetivo: Determinar el número de unidades a transportar desde los orígenes a los destinos a costo mínimo.

$$\text{MIN} \equiv z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeto a

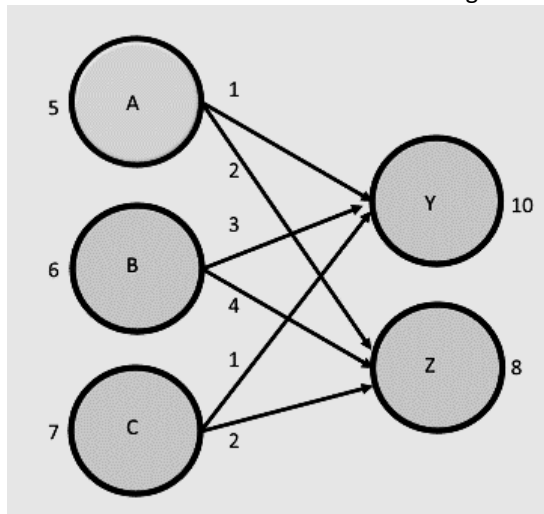
$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{k=1}^w a_k$$

¹⁵ Las unidades puede ser un artículo (un auto, una máquina), una caja (de 100 lapiceras), un container (de 10000 cajas), etc.

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{l=1}^u b_l$$

$$x_j \geq 0, \text{entero} \forall j$$

Supongamos que hay tres oferentes (A, B y C) que disponen respectivamente de 5, 6 y 7 unidades a trasladar a dos demandas (Y y Z) que requieren cada una 10 y 8 unidades respectivamente, con costos de ruta como se indican en la figura:



Este problema se puede plantear simplemente como un problema de programación lineal. Lo haremos: determinamos la variable de decisión, que es “unidades a transportar desde A hasta Y” y la llamamos X1 y desde A hasta Z, X2 y así hasta la variable unidades a transportar desde C hasta Z es X6, queda el problema de programación lineal:

$$Z = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 1x_5 + 2x_6 \equiv \min$$

sujeto.a :

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_3 + x_4 = 6$$

$$x_5 + x_6 = 7$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 10$$

$$x_2 + x_4 + x_6 = 8$$

$$x_i \geq 0, \text{entero}$$

En definitiva, la característica de un modelo de Programación lineal que se aplica para solucionar un problema de transporte es el conjunto de restricciones que tiene estas particularidades:

- 1) las restricciones son igualdades,
- 2) la matriz de coeficientes tecnológicos solo incluye unos o ceros, adimensionales
- 3) las restricciones lógicas establecen que las variables de decisión son no negativas enteras.

Para evitar las complejidades del método de resolución algorítmica¹⁶ señalado en capítulos anteriores se presentan algunos métodos heurísticos y se muestra su correlación con el método Simplex.

Problema ejemplo:

Best Food cuenta con tres plantas, que tienen las siguientes ofertas de producción:

- a. Munro (M), 72
- b. Villa Mercedes (V), 76
- c. Mar del Plata (P), 66

y tres Centros de Logística, que demandan:

1. Adrogué (A), 92
2. Rosario (R), 77
3. Córdoba (C), 45

¹⁶ En la parte B de este capítulo se hace un desarrollo del algoritmo Simplex en este caso para comprobar las dificultades que incorpora.

Los costos del transporte, tabulados por mercado, ruta y cantidad de mercadería unitaria son:

	Adrogué A	Rosario R	Córdoba C
Munro M	4	8	8
Villa Mercedes V	16	24	16
Mar del Plata P	8	16	24

El modelo para encontrar el resultado es, aplicar lo conocido para programación lineal, y llamar a cada variable con la combinación de los códigos de cada oferta con cada demanda. Así, la variable que representa “Unidades a transportar desde Munro (M) a Córdoba (C), será MC:

$$Z = 4MA + 8MR + 8MC + 16VA + 24VR + 16VC + 8PA + 12PR + 24PC \equiv \text{Min}$$

sujeto a:

$$MA + MR + MC = 72$$

$$VA + VR + VC = 76$$

$$PA + PR + PC = 66$$

$$MA + VA + PA = 92$$

$$MR + VR + PR = 77$$

$$MC + VC + PC = 45$$

$$\text{var} \geq 0, \text{ enteras}$$

Como ya fue señalado (y se verá en el siguiente capítulo) el método de programación lineal es dificultoso, por lo cual se veremos y desarrollaremos un método heurístico cuyo primer paso consiste en elaborar una **tabla de transporte**, como la que vemos a continuación:

Destinos →	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M	$c_{MA} = 4$ MA	$c_{MR} = 8$ MR	$c_{MC} = 8$ MC	72
VILLA MERCEDES V	$c_{VA} = 16$ VA	$c_{VR} = 24$ VR	$c_{VC} = 16$ VC	76
MAR DEL PLATA P	$c_{PA} = 8$ PA	$c_{PR} = 16$ PR	$c_{PC} = 24$ PC	66
Demanda	92	77	45	

Se verifica que se trata de una tabla *balanceada*, ya que:

$$\sum_{k=1}^M \text{ofertas} = \sum_{i=1}^N \text{demandas}$$

Podría haber ocurrido que no fuera balanceada por dos motivos (estas situaciones se discutirán más adelante):

Hay más ofertas que demandas. Solución: se crea un centro artificial de demanda

Hay menos ofertas que demandas. Solución: se crea un centro artificial de ofertas

Método heurístico de la esquina noroeste

El método de la “esquina noroeste” comienza asignando, en la tabla, todas las unidades a transportar que se pueda a la primera celda, la MA. Para eso se pone el máximo posible de la oferta (en este caso, 72), y luego se procede a llenar todas las restantes del renglón: comenzando por las MR y MC las cuales — por haber gastado todo lo que había — no tendrán asignación posible y valdrán cero, pues la oferta de esa planta fue toda al primer destino.

La VA deberá tratar de completar la demanda de esa columna (92), como MA tiene asignado 72, ésta deberá valer

$$92 - 72 = 20.$$

La VR deberá de tratar de cubrir la oferta de 76, completando con 56 los veinte de la anterior. El total es:

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
MUNRO M	cMA= 4 MA=72	cMR= 8 MR=0	cMC= 8 MC=0	72
VILLA MERCEDDES V	cVA= 16 VA=92 - 72=20	cVR= 24 VR=76-20=56	cVC= 16 VC=0	76
MAR DEL PLATA P	cPA = 8 PA=0	cPR= 16 PR=77-56=21	cPC= 24 PC=66-21=45	66
Demanda	92	77	45	

Si se efectúa la sumatoria del producto de todos los $C_j X_j$ se obtendrá un costo de transporte de \$ 3368. Esa es la solución trivial.

A continuación, se evalúa si es posible analizar todas y cada una de las celdas vacías (llamando celda vacía a aquellas cuyo X_{ij} vale cero), para lo cual se verificará que la suma de columnas más la suma de filas menos uno sea igual al número de celdas no nulas (que tienen un valor) En este caso 3 columnas + 3 renglones – 1 = 5, que es el número de celdas ocupadas. Entonces se dice que el problema no es degenerado, ya que cada celda vacía tiene al menos una forma de evaluarse.

Método para la evaluación de celdas vacías.

Se evalúa asignando una unidad a transportar en la primera celda vacía. En el caso del problema, se asigna una unidad a MR, sacándosela a MA. Esto implica mover una unidad en todo el entorno para mantener las sumas de oferta y demanda. Cuando se asigna una, se indica con (+), cuando se saca, con (–).

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M	$C_{MA}=4$ MA=71 (–)	$C_{MR}=8$ MR=1 (+)	$C_{MC}=8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V	$C_{VA}=16$ VA=20 (+)	$C_{VR}=24$ VR=56 (–)	$C_{VC}=16$ VC=0	76
MAR DEL PLATA P	$C_{PA}=8$ PA=0	$C_{PR}=16$ PR=21	$C_{PC}=24$ PC=45	66
Demanda	92	77	45	

¿Qué efecto tuvo esta modificación?

Aumento de costo de Munro a Rosario	\$ 8
Aumento de costo de V.Mer a Adrogue	\$ 16
Aumento total de Costo	\$ 24
Disminución de costo Munro a Adrogue	\$ 4
Disminución de costo V Mercedes a Rosario	\$ 24
Disminución total de costo	\$ 28

Balance total: Aumentos – disminuciones: $24 - 28 = -4$, que, al ser <0 , indica que conviene efectuar el cambio, hay una disminución del costo en 4 por unidad transportada por esa ruta.

Evaluamos la ruta MR de esta manera: $C_{MR} - C_{MA} + C_{VA} - C_{VR}$.

Significa que podremos evaluar todas y cada una de las celdas “vacías” o cero:

La celda correspondiente a C_{MC}^* MC, (Munro–Córdoba)

$$MC - MA + VA - VR + PR - PC = 8 - 4 + 16 - 24 + 16 - 24 = -12$$

La VC:

$$VC - VR + PR - PC = 16 - 24 + 16 - 24 = -16$$

La PA:

$$PA - PR + VR - VA = 8 - 16 + 24 - 16 = 0$$

Cada uno de los resultados es un índice de mejoramiento, por lo que hay que elegir aquella que tiene el valor más negativo, que es la ruta Villa Mercedes — Córdoba (VC = -16)

La cuestión es, ¿cuántas unidades hay que enviar por VC?. Para responder se usa el mismo ciclo que la originó: (Nótese que lo que estamos haciendo es, en realidad, evaluar costos de oportunidad)

	24		16
VR=56	(-)	VC=0	(+)
	16		24
PR=21	(+)	PC=45	(-)

Se elige la cantidad transportada más pequeña de las celdas marcadas (-), en este caso, 45, porque ese será el número máximo que podremos enviar por VC, ya que cada unidad que asignemos a VC decrementa una en VR y una en PC. El recurso acotante será el que se acabe primero: PC. Ese valor de 45 será sumado o restado en cada celda, según esté marcada con (+) ó (-). Evaluación de recursos limitantes.

	24		16
VR=56-45=11		VC=0+45=45	
	16		24
PR=21+45=66		PC=45-45=0	

Finalmente, la tabla completa queda así:

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M	$C_{MA}=4$ MA=72	$C_{MR}=8$ MR=0	$C_{MC}=8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V	$C_{VA}=16$ VA=20	$C_{VR}=24$ VR=11	$C_{VC}=16$ VC=45	76
MAR DEL PLATA P	$C_{PA}=8$ PA=0	$C_{PR}=16$ PR=66	$C_{PC}=24$ PC=0	66
Demanda	92	77	45	

Si se evalúa

$$\sum c_{ij}x_{ij}$$

se obtiene:

$$72 \times 4 + 20 \times 16 + 11 \times 24 + 45 \times 16 + 66 \times 16 = 2648.$$

(La tabla original tenía un valor de 3368)

Segunda etapa: reevaluación de celdas vacías

Se vuelven a analizar las celdas vacías a efectos de comprobar si hay negativas y de elegir, si las hay, la más negativa de ellas:

$$MR \rightarrow MR - MA + VA - VR = 8 - 4 + 16 - 24 = -4$$

$$MC \rightarrow MC - MA + VA - VC = 8 - 4 + 16 - 16 = 4$$

$$PA \rightarrow PA - VA + VR - PR = 8 - 16 + 24 - 16 = 0$$

$$PC \rightarrow PC - VC + VR - PR = 24 - 16 + 24 - 16 = 16$$

Se opera sobre la más negativa, que es MR:

MA=72	4 (-)	MR	8 (+)
VA=20	16 (+)	VR=11	24 (-)

Sumando y restando el valor más pequeño de las celdas marcadas con (-), queda:

MA=61	4 (-)	MR=11	8 (+)
VA=31	16 (+)	VR=0	24 (-)

Así la nueva tabla será:

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M	$C_{MA}=4$ MA=61	$C_{MR}=8$ MR=11	$C_{MC}=8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V	$C_{VA}=16$ VA=31	$C_{VR}=24$ VR=0	$C_{VC}=16$ VC=45	76
MAR DEL PLATA P	$C_{PA}=8$ PA=0	$C_{PR}=16$ PR=66	$C_{PC}=24$ PC=0	66
Demanda	92	77	45	

Cuyo costo es de 2604.

Tercera etapa: reevaluación de celdas vacías en la nueva tabla

Se reevalúan todas las celdas vacías:

$$VR \rightarrow VR - MR + MA - VA = 24 - 8 + 4 - 16 = 4$$

$$MC \rightarrow MC - MA + VA - VC = 8 - 4 + 16 - 16 = 4$$

$$PA \rightarrow PA - MA + MR - PR = 8 - 4 + 8 - 16 = -4$$

$$PC \rightarrow PC - PR + MR - MA + VA - VC = 24 - 16 + 8 - 4 + 16 - 16 = 12$$

que le da chances a celda MC:

	4		8
MA=61	(-)	MR=11	(+)
	8		16
PA	(+)	PR=66	(-)

que queda, al sumar y restar el más pequeño de las celdas marcadas con (-):

	4		8
MA=0	(-)	$M_R=72$	(+)
	8		16
PA=61	(+)	PR=5	(-)

La nueva tabla será:

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M	$C_{MA} = 4$ MA=0	$C_{MR} = 8$ MR=72	$C_{MC} = 8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V	$C_{VA} = 16$ VA=31	$C_{VR} = 24$ VR=0	$C_{VC} = 16$ VC=45	76
MAR DEL PLATA P	$C_{PA} = 8$ PA=61	$C_{PR} = 16$ PR=5	$C_{PC} = 24$ PC=0	66
Demanda	92	77	45	

Sobre la que se realizan los nuevos análisis sobre celdas vacías:

$$MA \rightarrow MA - PA + PR - MR = 4 - 8 + 16 - 8 = 4$$

$$MC \rightarrow MC - VC + VA - PA + PR - MR = 8 - 16 + 16 - 8 + 16 - 8 = 8$$

$$VR \rightarrow VR - MA + PR - PA - VA = 24 - 16 + 8 - 16 = 0$$

$$PC \rightarrow PC - VC + VA - PA = 24 - 16 + 16 - 8 = 16$$

Debido a que no hay un índice negativo, significa que la última es la solución óptima. El costo de esta solución es 2360. Si se repasa el método empleado se podrá verificar que, de otra manera, se sigue el método Simplex: ingresando una variable por vez a la base reemplazando a otra cuyo valor pasa a ser nulo y examinando los costos de oportunidad de las candidatas a entrar.

Otros métodos heurísticos de resolución.

Destinos	ADROGUE A → K1	ROSARIO R → K2	CÓRDOBA C → K3	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M → R1	$C_{MA} = 4$ MA=72	$C_{MR} = 8$ MR=0	$C_{MC} = 8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V → R2	$C_{VA} = 16$ VA=92 72=20	$C_{VR} = 24$ VR=76 20=56	$C_{VC} = 16$ VC=0	76
MAR DEL PLATA P → R3	$C_{PA} = 8$ PA=0	$C_{PR} = 16$ PR=77-56=21	$C_{PC} = 24$ PC=66-21=45	66
Demanda	92	77	45	

Método de multiplicadores

A diferencia del anterior, este método es menos tedioso pues no requiere evaluaciones parciales. Para el caso, se parte de la tabla inicial obtenida por el método de la esquina nordeste.:

Destinos	ADROGUE A	ROSARIO R	CÓRDOBA C	Capacidad Planta
Origenes				
MUNRO M	MA=72 $c_{MA}= 4$	MR=0 $c_{MR}= 8$	MC=0 $c_{MC}= 8$	72
VILLA MERCEDES V	VA=92 - 72=20 $c_{VA}= 16$	VR=76-20=56 $c_{VR}= 24$	VC=0 $c_{VC}= 16$	76
MAR DEL PLATA P	PA=0 $c_{PA}= 8$	PR=77-56=21 $c_{PR}= 16$	PC=66-21=45 $c_{PC}= 24$	66
Demanda	92	77	45	

El siguiente paso será encontrar un índice de mejoramiento, asignando un valor R_i a cada R-englón i y un valor K_j a cada k-olumna j , en el ejemplo, tanto i como j valen 1, 2 y 3. El índice se aplicará a cada una de las celdas no nulas

Para calcular los valores se emplea:

$$R_i + K_j = C_j$$

que se aplica sólo para las celdas no vacías:

$$\begin{aligned} R1 + K1 &= 4 \\ R2 + K1 &= 16 \\ R2 + K2 &= 24 \\ R3 + K2 &= 16 \\ R3 + K3 &= 24 \end{aligned}$$

Quedando cinco ecuaciones con seis incógnitas. Si se asigna cero a R1 queda:

$$\begin{aligned} K1 &= 4 \\ R2 &= 12 \\ K2 &= 12 \\ R3 &= 4 \\ K3 &= 20 \end{aligned}$$

Destinos	ADROGUE A → K1=4	ROSARIO R → K2=12	CÓRDOBA C → K3=20	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M → R1=0	$C_{MA} = 4$ MA=72	$C_{MR} = 8$ MR=0	$C_{MC} = 8$ MC=0	72
VILLA MERCEDES V → R2=12	$C_{VA} = 16$ VA=20	$C_{VR} = 24$ VR=56	$C_{VC} = 16$ VC=0	76
MAR DEL PLATA P → R3=4	$C_{PA} = 8$ PA=0	$C_{PR} = 16$ PR=21	$C_{PC} = 24$ PC=45	66
Demanda	92	77	45	

(Como puede observarse, tanto R_i como K_j pueden ser mayores, menores o iguales que cero)

El siguiente paso es buscar el índice de mejoramiento (*ime*) de cada celda nula, restando al costo de esa celda el valor del renglón y el valor de la columna.

$$ime = C_{ij} - R_i - K_j$$

Si el valor del índice es negativo, se puede mejorar el costo total del transporte, si todos los valores son cero o positivos es una solución óptima.

Así se encuentra que

$$C_{12} = C_{MR} - R_1 - K_2 = 8 - 0 - 12 = -4$$

$$C_{13} = C_{MC} - R_1 - K_3 = 8 - 0 - 20 = -12$$

$$C_{23} = C_{VC} - R_2 - K_3 = 16 - 12 - 20 = -16$$

$$C_{31} = C_{PA} - R_3 - K_1 = 8 - 4 - 4 = 0$$

Como C_{VC} tiene el valor más negativo, se crea un ciclo cerrado alrededor de ella, asignándole un (+), por lo que la celda VR tendrá un (-), la 32 un (+) y la 33 un (-).

VR	56	VC	0
(-)		(+)	
PR	21	PC	45
(+)		(-)	

De las marcadas (-) se elige la de valor menor, que se suma a las (+) y se resta de las (-):

VR	$56 - 45 = 11$	VC	$0 + 45 = 45$
(-)		(+)	
PR	$21 + 45 = 66$	PC	$45 - 45 = 0$
(+)		(-)	

Así se obtiene una nueva tabla:

Destinos	ADROGUE A→K1=4	ROSARIO R→K2=12	CÓRDOBA C→K3=20	Capacidad Planta
Orígenes				
MUNRO M→R1=0	$C_{MA}=4$ MA=72	$C_{MR}=8$ MR=0	$C_{MC}=8$ MC=0	72
VILLA MERCEDDES V→R2=12	$C_{VA}=16$ VA=20	$C_{VR}=24$ VR=11	$C_{VC}=16$ VC=45	76
MAR DEL PLATA P→R3=4	$C_{PA}=8$ PA=0	$C_{PR}=16$ PR=66	$C_{PC}=24$ PC=0	66
Demanda	92	77	45	

Nuevamente se hace $R_1 = 0$ y se obtienen los valores de cada columna y cada renglón, y los índices de mejoramiento, que son:

$$C_{MR} = -4$$

$$C_{MC} = 12$$

$$C_{VC} = 0$$

$$C_{PA} = 16$$

y así hasta obtener un juego de índices de mejoramiento iguales o mayores que cero, lo que indica el fin de la tarea.

Método de Vogel

Tiene como ventaja el realizar menos iteraciones. Generalmente la primera matriz es la óptima. Se realiza calculando las diferencias entre los costos más pequeños en las columnas y los renglones. Se muestra una tabla planteo y con las diferencias calculadas.

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	X_{11} 10	X_{12} 20	X_{13} 6	X_{14} 5	30	$6-5=1$
Planta 2	X_{21} 5	X_{22} 17	X_{23} 29	X_{24} 22	30	$17-5=12$
Planta 3	X_{31} 15	X_{32} 25	X_{33} 5	X_{34} 10	20	$10-5=5$
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia	$10-5=5$	$20-17=3$	$6-5=1$	$10-5=5$		

El segundo renglón muestra la diferencia más alta, y dentro de ese renglón, la celda 21 tiene el costo unitario más bajo.

A esa celda se le asigna el máximo posible de las unidades que permita el depósito (20), por lo que queda eliminada la primera columna (ninguna otra celda de esa columna puede tener valores no nulos). Con el resto de la tabla se obtienen las nuevas diferencias mínimas:

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	$X_{11} = 0$ 10	X_{12} 20	X_{13} 6	X_{14} 5	30	$6-5=1$
Planta 2	$X_{21}=20$ 5	X_{22} 17	X_{23} 29	X_{24} 22	30	$22-17=5$
Planta 3	$X_{31}=0$ 15	X_{32} 25	X_{33} 5	X_{34} 10	20	$10-5=5$
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia		$20-17=3$	$6-5=1$	$10-5=5$		

Como hay tres diferencias iguales (5), al azar se elige una: tercer renglón. En ese renglón el costo menor es el de la celda 33. A esa celda se le asignan 15 unidades y se elimina la columna 3.

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	$X_{11} = 0$ 10	X_{12} 20	$X_{13}=0$ 6	X_{14} 5	30	$20-5=15$
Planta 2	$X_{21}=20$ 5	X_{22} 17	$X_{23}=0$ 29	X_{24} 22	30	$22-17=5$
Planta 3	$X_{31}=0$ 15	X_{32} 25	$X_{33}=15$ 5	X_{34} 10	20	$25-10=15$
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia		$20-17=3$		$10-5=5$		

Nuevamente hay dos diferencias máximas iguales. Arbitrariamente se elige el renglón 3, en el cual la celda menor es la celda 34. A esa celda se le asigna el máximo, 5, (Ya que la planta ofrece 5 y el depósito demanda 25) y se elimina por saturación el renglón (se agotó la oferta).

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	$X_{11} = 0$ 10	X_{12} 20	$X_{13}=0$ 6	X_{14} 5	30	$20-5=15$
Planta 2	$X_{21}=20$ 5	X_{22} 17	$X_{23}=0$ 29	X_{24} 22	30	$22-17=5$
Planta 3	$X_{31}=0$ 15	$X_{32}=0$ 25	$X_{33}=15$ 5	$X_{34}=5$ 10	20	
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia		$20-17=3$		$10-5=5$		

Ahora la mayor diferencia es la de la columna del depósito 4 y C_{14} el valor más pequeño. A esa celda se le asignan 20 unidades y se satura:

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	$X_{11} = 0$ 10	$X_{12} = 20$	$X_{13} = 0$ 6	$X_{14} = 20$ 5	30	
Planta 2	$X_{21} = 20$ 5	$X_{22} = 17$	$X_{23} = 0$ 29	$X_{24} = 0$ 22	30	
Planta 3	$X_{31} = 0$ 15	$X_{32} = 0$ 25	$X_{33} = 15$ 5	$X_{34} = 5$ 10	20	
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia		$20 - 17 = 3$				

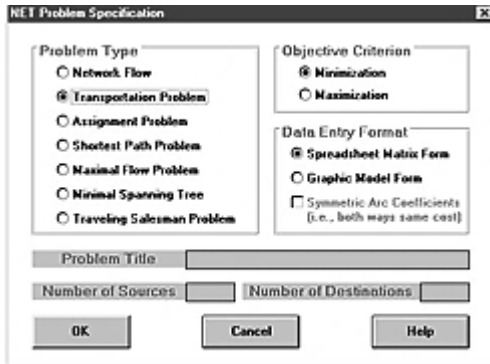
Si se le asigna a celda1 y a celda 22 10 unidades a cada una. El resultado final será:

	Depósito 1	Depósito 2	Depósito 3	Depósito 4	Oferta	Diferencia
Planta 1	$X_{11} = 0$ 10	$X_{12} = 10$ 20	$X_{13} = 0$ 6	$X_{14} = 20$ 5	30	
Planta 2	$X_{21} = 20$ 5	$X_{22} = 10$ 17	$X_{23} = 0$ 29	$X_{24} = 0$ 22	30	
Planta 3	$X_{31} = 0$ 15	$X_{32} = 0$ 25	$X_{33} = 15$ 5	$X_{34} = 5$ 10	20	
Demanda	20	20	15	25		
Diferencia						

El problema de Best Foods resuelto con WinQSB

Carga de datos

Se selecciona el módulo “**Modelizado de redes**” (*Network Modeling*) de WinQSB y si se elige **nuevo problema**, aparece un cuadro de diálogo en el que se pueden seleccionar distintos tipos de problemas:



Flujo en redes, Problema de transporte, Problemas de asignación, Problemas de camino mínimo, Problemas de máximo flujo, Mínima expansión de red y Problema del viajante de comercio.

En este caso seleccionamos **Problema de transporte**, y cargamos el dato de número de orígenes y de destinos y se

selecciona si el problema es de minimización o de maximización, al aceptar, aparece una pantalla como la siguiente,

From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Supply
Source 1				0
Source 2				0
Source 3				0
Demand	0	0	0	

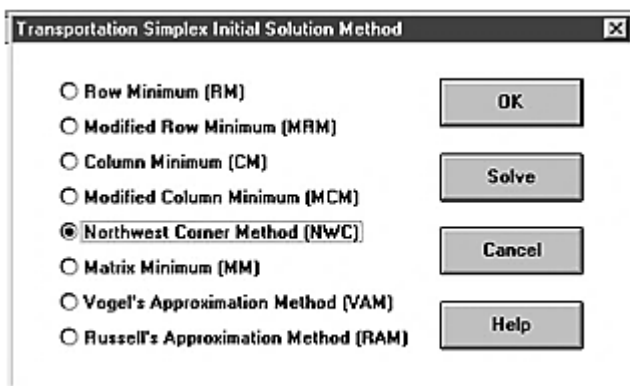
que se completa con los datos del problema y, si se desea, mediante el menú *edit* se establecen los nombres de los destinos y los orígenes:

From \ To	Adroque	Rosario	Córdoba	Supply
Munro	4	8	8	72
VMerc	16	24	16	76
M del Plata	8	16	24	66
Demand	92	77	45	

con lo cual el problema está en condiciones de ser resuelto mediante el menú *Solve and Analyze*, submenú *Solve the problem*.

06-12-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Munro	Rosario	72	8	576	0
2	VMerc	Adroque	31	16	496	0
3	VMerc	Córdoba	45	16	720	0
4	M del Plata	Adroque	61	8	488	0
5	M del Plata	Rosario	5	16	80	0
	Total	Objective	Function	Value =	2360	

además, se puede seleccionar el método de solución eligiendo, en lugar de *Solve the problem*, el método inicial que presenta una pantalla de opciones como la que sigue:

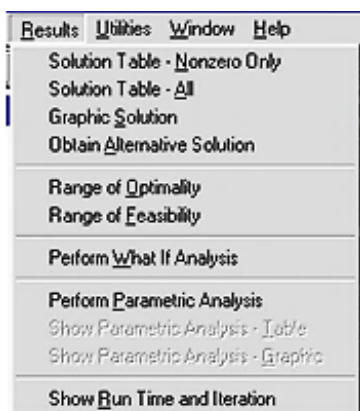


También existe la posibilidad de ver, paso a paso las tablas de iteración, como la primera que se muestra en la figura siguiente y que se logra en el menú *Solve and analyze*, submenú *Solve and display steps, tableau*.

Transportation Tableau for Best Food - Iteration 1					
	Adrogué	Rosario	Córdoba	Supply	Dual P(i)
Munro	4	8	8		
	72				
VMerc	16	24	16		
	20	56	Cij=-16 **		
M del Plata	8	16	24		
		21	45*		
Demand					
Dual P(i)					
	Objective Value = 3368 (Minimiza				
	** Entering: SLuis to Córdoba * Leaving: M del Plata to				

Presentación detallada de resultados.

Un detalle de los resultados puede obtenerse, una vez resuelto, mediante el menú *Results*, que presenta varias opciones



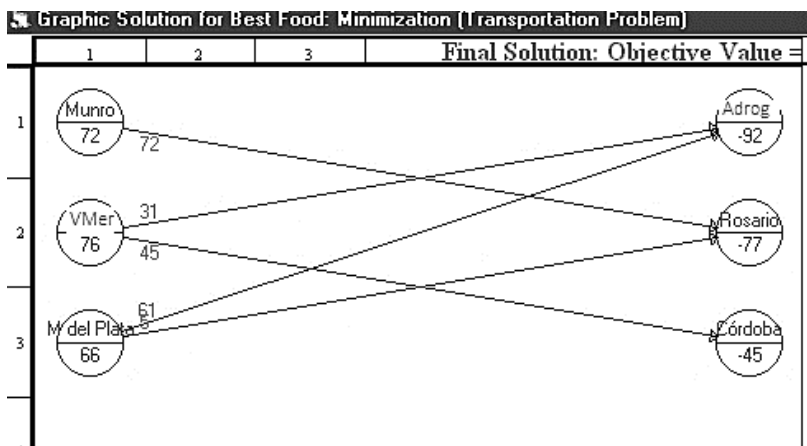
las salidas que se obtienen son, (en el orden que aparecen en el menú):

Tabla de valores no nulos, es la ya presentada como solución básica.

Tabla completa, que es la siguiente:

06-12-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Munro	Adroque	0	4	0	4
2	Munro	Rosario	72	8	576	0
3	Munro	Córdoba	0	8	0	8
4	VMer	Adroque	31	16	496	0
5	VMer	Rosario	0	24	0	0
6	VMer	Córdoba	45	16	720	0
7	M del Plata	Adroque	61	8	488	0
8	M del Plata	Rosario	5	16	80	0
9	M del Plata	Córdoba	0	24	0	16
	Total	Objective	Function	Value =	2360	

Solución gráfica:



Solución alternativa, que presenta, para el mismo costo, de ser posible, otras variantes:

06-12-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Munro	Adroque	0	4	0	4
2	Munro	Rosario	72	8	576	0
3	Munro	Córdoba	0	8	0	8
4	VMer	Adroque	26	16	416	0
5	VMer	Rosario	5	24	120	0
6	VMer	Córdoba	45	16	720	0
7	M del Plata	Adroque	66	8	528	0
8	M del Plata	Rosario	0	16	0	0
9	M del Plata	Córdoba	0	24	0	16
	Total	Objective	Function	Value =	2360	

Rangos óptimos y posibles, que representan análisis de sensibilidad para la solución hallada

06-12-2002	From	To	Unit Cost	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. Cost	Allowable Max. Cost
1	Munro	Adroque	4	4	at bound	0	M
2	Munro	Rosario	8	0	basic	-M	12
3	Munro	Córdoba	8	8	at bound	0	M
4	VMer	Adroque	16	0	basic	8	16
5	VMer	Rosario	24	0	at bound	24	M
6	VMer	Córdoba	16	0	basic	0	24
7	M del Plata	Adroque	8	0	basic	8	12
8	M del Plata	Rosario	16	0	basic	12	16
9	M del Plata	Córdoba	24	16	at bound	8	M

Range of Feasibility for Best Food: Minimization (Transportation Problem)						
06-12-2002 18:23:33	Node	Supply	Demand	Shadow Price	Allowable Min. Value	Allowable Max. Value
1	Munro	72	0	-16	72	77
2	VMerced	76	0	0	76	M
3	M del Plata	66	0	-8	66	97
4	Adrogue	0	92	16	61	92
5	Rosario	0	77	24	72	77
6	Córdoba	0	45	16	0	45

Análisis particulares

Tanto el menú de resultados como el de soluciones presentan dos análisis de perturbación interesantes: el primero es el llamado *que pasaría si?* (*what if analysis*) que comienza con un cuadro de diálogo que nos permite ingresar parámetros:

Sin necesidad de replantear los datos originales del problema, se pueden observar, para cada arco en particular, a elegir de la lista derecha, los cambios que se producen si hay transformaciones en los costos o en las ofertas y demandas. En la ventana inferior aparece el valor original que se intentará cambiar para “ver que pasa...” Debe notarse que hay un botón etiquetado Vector, que produce el mismo efecto que un clic sobre el listado derecho: accede al cambio de valores, con la diferencia que veremos los valores originales de todos los arcos (o nodos, si habíamos marcado “Node Value”)

El segundo análisis es el paramétrico, que nos presenta una pantalla muy similar:

What If Analysis [X]

What If Analysis allows a minor change of the problem and resolve it without altering the original data. Select what to analyze, and click an item from the list or press the Vector button. Then enter the new value of the selected item. When it is ready, press the OK button to solve with the new change. The original data is retained.

Analysis on

Link (Arc) Coefficient (Cost/Distance)

Node Value (Supply/Demand)

Flow Upper Bound

Flow Lower Bound

Select one or press Vector

- Munro to Adrogue
- Munro to Rosario
- Munro to Córdoba
- VMerced to Adrogue
- VMerced to Rosario
- VMerced to Córdoba
- M del Plata to Adrogue
- M del Plata to Rosario
- M del Plata to Córdoba

Link Cost/Distance

Munro to G Bs As

OK
Cancel
Help
Vector

Parametric Analysis

The program analyzes the objective function based on $C+uC'$, where C is the original value, C' is the direction of perturbation, and u is the scale of change. Select what to analyze, and then click an item from the list or press the Vector button for defining C'. Enter the Start, End, and Step values to specify the range of u. When it is ready, press the OK button to perform the analysis.

Analysis on

Link (Arc) Coefficient (Cost/Distance)

Node Value (Supply/Demand)

Starting u

Ending u

Step of u

Select one or press Vector

- Munro to Adrogue
- Munro to Rosario
- Munro to Córdoba
- VMerced to Adrogue
- VMerced to Rosario
- VMerced to Córdoba
- M del Plata to Adrogue
- M del Plata to Rosario
- M del Plata to Córdoba

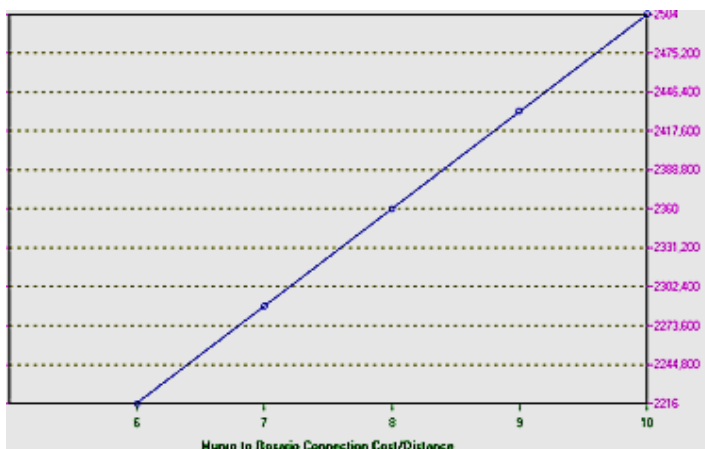
Munro to G Bs As

OK Cancel Help Vector

La diferencia consiste en que se puede elegir la “dirección” de la perturbación y la magnitud del cambio. Por ejemplo, para el vector seleccionado, Munro a Rosario, cuyo valor original es 8, se analiza lo que ocurre cuando ese valor es reemplazado sucesivamente desde 6 hasta 10 en pasos de 1

06-12-2002	Munro to Rosario Connection Cost/Distance	OBJ Value
1	6	2216
2	7	2288
3	8	2360
4	9	2432
5	10	2504

Para ello en “starting u” se escribe -2 (inicio en $8 - 2 = 6$), en “ending u” se coloca +2 (final en $8 + 2 = 10$) y en “step”, un paso de 1. Así comprobará 6, 7, 8, 9 y 10:



Se puede ver el cambio del valor de la función objetivo conforme va variando el coeficiente del funcional (costo unitario de transporte de Munro a Rosario). Es posible obtener un gráfico, en el menú resultados una vez hecho el análisis paramétrico:

El problema de transporte resuelto en hoja de cálculo (Excel/Calc)

Tomando como ejemplo el problema presentado en el comienzo del capítulo, veremos como plantearlo en una planilla de hoja de cálculo. Una vez más, se hace notar que, como en casi todos los casos en que se emplee hoja de cálculo, seguramente hay otras maneras de hacerlo:

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2								
3								
4								
5		<i>cantidad a enviar desde cada planta a cada almacén</i>						
6	PLANTA		ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA	ENVIO TOTAL		
7	MUNRO					0		
8	V MERCEDES					0		
9	M DEL PLATA					0		
10		RECIBO TOTAL=>	0	0	0			
11								
12								
13		<i>costo de enviar de cada planta a cada almacén</i>						
14	PLANTA		ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA	OFERTA TOTAL		
15	MUNRO	72	4	8	8	72		
16	V MERCEDES	76	16	24	16	76		
17	M DEL PLATA	66	8	16	24	66		
18		DEMANDA TOTAL=>	92	77	45			
19	COSTO TOTAL DEL ENVÍO		0	<i>(Función objetivo)</i>				
20								
21								

En esta hoja se volcaron todos los datos:

- La matriz de variables (celdas a cambiar) es el Rango **C7:E9**.
- La función objetivo se escribe en la celda **B19**, destinada a obtener el valor del cálculo, en el ejemplo, se puede optar por dos formas alternativas de escribir la función:

a) hay que escribir una función explícita, que sea el producto elemento a elemento de la matriz de cantidades (grupo de celdas a cambiar) (**C7:E9**) con la matriz de costos de transporte por unidad (**C15:E17**), y efectuando la sumatoria de todos esos productos:

$$=C7*C15+D7*D15+E7*E15+C8*C16+D8*D16+.E8*E16+C9*C17+D9*D17+E9*E17.$$

b) usar la función **SUMAPRODUCTO** (Excel) o **SUMA.PRODUCTO** (Calc):

$$=SUMAPRODUCTO(C7:E9;C15:E17)$$

$$=SUMA.PRODUCTO(C7:E9;C15:E17)$$

- Hay dos filas para resaltar:
 - la de la suma de lo que realmente es transportado a cada almacén (fila **C10:E10**)
 - la que muestra lo que demanda cada almacén (**C18:E18**) (que es dato del problema, en cambio, la suma de lo recibido en cada almacén, **C10:E10**, al principio da cero)

El contenido de la celda **C10** será: **=SUMA(C7:C9)**,
el de la D10 **=SUMA(D7:D9)**,
y E10 será **=SUMA(E7:E9)**.

- La suma de lo que se envía efectivamente a cada planta está en el rango (**F7:F9**) – donde **F7** será **=SUMA(C7:E7)** y valores similares para **F8** y **F9** – y se compara con lo que produce u ofrece cada una de ellas en el vector (**F15:F17**). (que es dato del problema. En cambio, la suma de lo enviado efectivamente, al principio da cero)
- Las restricciones se plantean de manera matricial:
 - Lo que se recibe es lo que se demanda (=), o como máximo lo que se demanda (\leq) (pruebe con ambas alternativas).
 - Lo que se envía es, como máximo (\leq), lo que se produce, o todo (=) (pruebe con ambas alternativas)
- Debe haber una condición de no negatividad y la restricción de enteros.

Procedimiento

Utilizamos Solver y completamos el escenario como se muestra en la figura (para Excel, arriba, y Calc, abajo)

The image shows the Excel Solver interface. On the left is a data table with two sections: 'cantidad a enviar desde cada planta a cada atmósfera' and 'costo de enviar de cada planta a cada atmósfera'. On the right is the 'Parámetros de Solver' dialog box.

cantidad a enviar desde cada planta a cada atmósfera				
	ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA	ENVIO TOTAL
				0
				0
				0
TOTAL=>	0	0	0	

costo de enviar de cada planta a cada atmósfera				
	ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA	OFERTA TOTAL
72	4	8	8	72
76	16	24	16	76
66	8	16	24	66
TOTAL=>	92	77	45	

0 (Función objetivo)

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

This is a close-up view of the Solver Parameters dialog box, showing the same settings as the previous image.

Establecer objetivo:

Para: Máx Mín Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

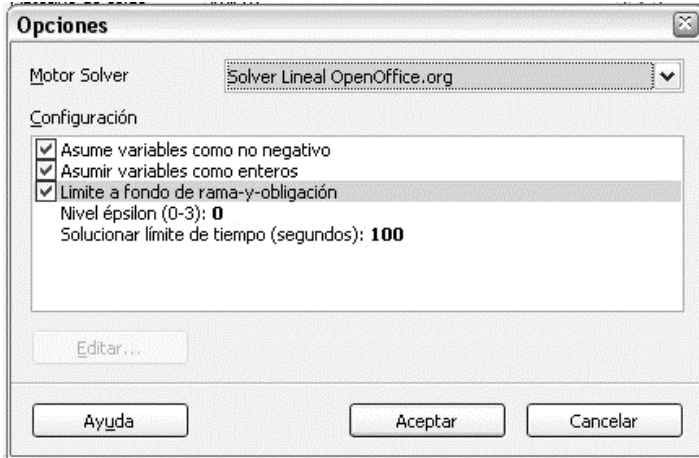
Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

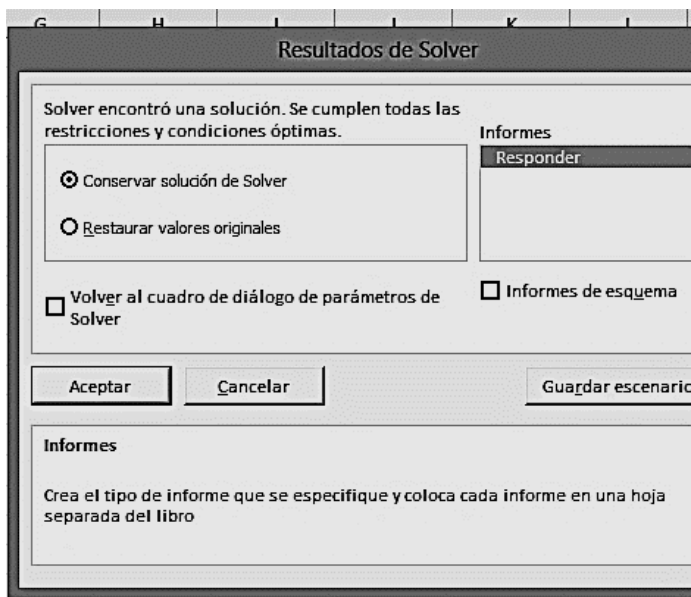
Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Debemos marcar la opción *Mínimo* y, elegiremos *adoptar el modelo lineal y no negatividad* (en Calc es redundante la opción de enteros, pero es necesario definir no negatividad):



Finalmente oprimimos "*Resolver*" (Solucionar) y tendremos un resultado. **Solo en Excel:** en ese momento aparecerá el cuadro de diálogo que se muestra en la figura siguiente. Sin embargo, antes de pulsar *Aceptar*, veremos que nos ofrece un Informe, de manera tal que si lo marcamos, al dar a *Aceptar*, además de los resultados veremos el informe. Debe tener en cuenta que si las restricciones son de igualdad no es posible obtener informes de sensibilidad y de límites como los que podíamos ver en los casos anteriores.

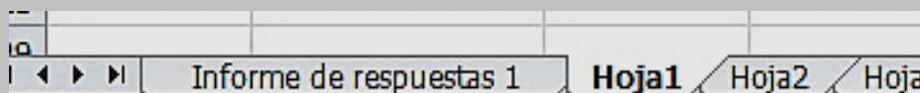


Llegados a este punto, simplemente podremos *Aceptar* pulsando el botón correspondiente, con lo cual obtendremos la hoja de cálculo original pero ahora con los valores encontrados y el costo de envío en la celda **B19**:

La figura siguiente muestra el aspecto de la pantalla cuando se completó el proceso después de pulsar aceptar.

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3							
4							
5	<i>cantidad a enviar desde cada planta a cada almacén</i>						
6	PLANTA		ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA		ENVIO TOTAL
7	MUNRO		0	72	0		72
8	V MERCEDES		31	0	45		76
9	M DEL PLATA		61	5	0		66
10	RECIBO TOTAL=>		92	77	45		
11							
12							
13	<i>costo de enviar de cada planta a cada almacén</i>						
14	PLANTA		ADROGUE	ROSARIO	CORDOBA		OFERTA TOTAL
15	MUNRO	72	4	8	8		72
16	V MERCEDES	76	16	24	16		76
17	M DEL PLATA	66	8	16	24		66
18	DEMANDA TOTAL=>		92	77	45		
19	COSTO TOTAL DEL ENVÍO	2360	<i>(Función objetivo)</i>				
20							

Solo en Excel: pulsando *Aceptar* y habiendo seleccionado el informe de respuestas, y luego del proceso de cálculo veremos que se agregó una nueva hoja en el libro de Excel:



Como fue señalado en capítulos anteriores, las hojas se nombran, por defecto -pues el nombre puede ser cambiado por el usuario-: *Informe de Respuestas*, *Informe de Sensibilidad e Informe de Límites*, cada uno de estos nombres estará seguido por un número de orden pues pueden solicitarse varios ensayando diversos resultados o restricciones (En este caso, solo Informe de respuestas)¹⁷.

¹⁷ Si se obtuvo un resultado sin informe y posteriormente nos damos cuenta de que lo necesitamos, podremos correr nuevamente *Solver*, partiendo de la planilla resultado (veremos que aparecen los rangos ya cargados) y, cuando se encuentre la solución, antes de pulsar *Aceptar*, marcaremos el o los informes deseados. (Cuando hay restricciones enteras o binarias podemos obtener sólo el Informe de Respuestas)

El informe de respuesta tendrá el aspecto de una planilla completa con los nombres de las variables y los valores máximo y mínimo. Mostrará también el rango de la variación de cada variable (en este caso desde el "0" arbitrario de inicio, pero puede ser que se hubiera comenzado desde un valor que era una solución previa a la que se le incluyó una nueva restricción) y la lista de estado de cada variable.

La ventaja de este tipo de planteo es que no es necesario hacer ajustes si hay matrices no cuadradas (por ejemplo, más depósitos o diferentes cantidades en oferta o demandas). La figura siguiente nos muestra un informe de Respuestas:

A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Informe de respuestas						
2	Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1						
3	Informe creado: 18/3/2018 09:41:52						
4	Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.						
5	Motor de Solver						
6	Motor: Simplex LP						
7	Tiempo de la solución: 0,031 segundos.						
8	Iteraciones: 7 Subproblemas: 0						
9	Opciones de Solver						
10	Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precisión 0,000001, Usar escala automática						
11	Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo						
12							
13							
14	Celda objetivo (Mín)						
15	Celda	Nombre	Valor original	Valor final			
16	\$B\$19	COSTO TOTAL DEL ENVÍO DEMANDA TOTAL=>	0	2360			
17							
18							
19	Celdas de variables						
20	Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero		
21	\$C\$7	MUNRO ADROGUE	0	0	Entero		
22	\$D\$7	MUNRO ROSARIO	0	72	Entero		
23	\$E\$7	MUNRO CORDOBA	0	0	Entero		
24	\$C\$8	V MERCEDES ADROGUE	0	31	Entero		
25	\$D\$8	V MERCEDES ROSARIO	0	0	Entero		
26	\$E\$8	V MERCEDES CORDOBA	0	45	Entero		
27	\$C\$9	M DEL PLATA ADROGUE	0	61	Entero		
28	\$D\$9	M DEL PLATA ROSARIO	0	5	Entero		
29	\$E\$9	M DEL PLATA CORDOBA	0	0	Entero		
30							
31							
32	Restricciones						
33	Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora	
34	\$C\$10	RECIBO TOTAL=> ADROGUE	92	\$C\$10=\$C\$18	Vinculante	0	
35	\$D\$10	RECIBO TOTAL=> ROSARIO	77	\$D\$10=\$D\$18	Vinculante	0	
36	\$E\$10	RECIBO TOTAL=> CORDOBA	45	\$E\$10=\$E\$18	Vinculante	0	
37	\$F\$7	MUNRO ENVIO TOTAL	72	\$F\$7=\$F\$15	Vinculante	0	
38	\$F\$8	V MERCEDES ENVIO TOTAL	76	\$F\$8=\$F\$16	Vinculante	0	
39	\$F\$9	M DEL PLATA ENVIO TOTAL	66	\$F\$9=\$F\$17	Vinculante	0	
40	\$C\$7:\$E\$9=Entero						
41							
42							
43							

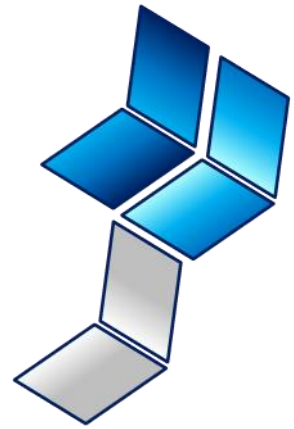
Ejercicio

Administramos tres Plantas (Bahía Blanca, Tres Arroyos y Santa Rosa), que producen 310, 260 y 280, respectivamente. Esa producción es derivada a cuatro almacenes.

Los almacenes y sus demandas son: Río Cuarto, 180; Rosario, 80; Córdoba, 200; La Plata, 160 y Buenos Aires, 230. Los costos de transporte son:

	Río Cuarto	Rosario	Córdoba	La Plata	Bs. As.
Bahía Blanca	10	8	6	5	4
Tres Arroyos	6	5	4	3	6
Santa Rosa	3	4	5	5	9





Capítulo 5 (parte 2). Programación lineal entera: Una aproximación a los algoritmos

Como ya mencionamos en el caso de los problemas de transporte, cuando se trabaja con modelos que tienen restricciones que implican que las variables de decisión (todas o algunas) solamente puedan asumir valores enteros, se dice que estamos frente a problemas de programación entera. Discutiremos en esta sección por qué a veces esos casos no pueden ser resueltos fácilmente por programación lineal, aunque todas las funciones sean lineales.

Sería razonable pensar que estos problemas se pueden resolver exactamente como cualquier otro sin la restricción de entero y, luego de hacerlo, redondear el resultado final a los valores enteros más próximos de cada variable. Sin embargo, ese procedimiento difícilmente daría resultados correctos. Demostraremos esta afirmación y, para comprender mejor todo el problema, desarrollaremos un caso:

Un vendedor de productos de computación tiene en stock 6 plaquetas de memoria de 4G y dispone de 28 hs. de mano de obra para armar modelos de PC destinados a venta directa en el inicio de clases. Tiene experiencia anterior y sabe que los modelos más vendidos son los de 4Gb y de 8Gb. Armar un modelo de 8Gb le lleva 2 plaquetas y 7 horas del tiempo disponible, mientras que el de 4Gb lleva una sola plaqueta, pero compensa el costo agregando un mini gabinete, por lo que le insume en total 8hs del tiempo disponible. Con el modelo 8Gb gana \$120 y con el 4Gb gana \$80. ¿Cuántas PC debe fabricar si desea maximizar sus ganancias?

El modelo lineal de este caso es, llamando G_1 al equipo de 4Gb y G_2 al otro, el siguiente:

$$Z = 80G_1 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

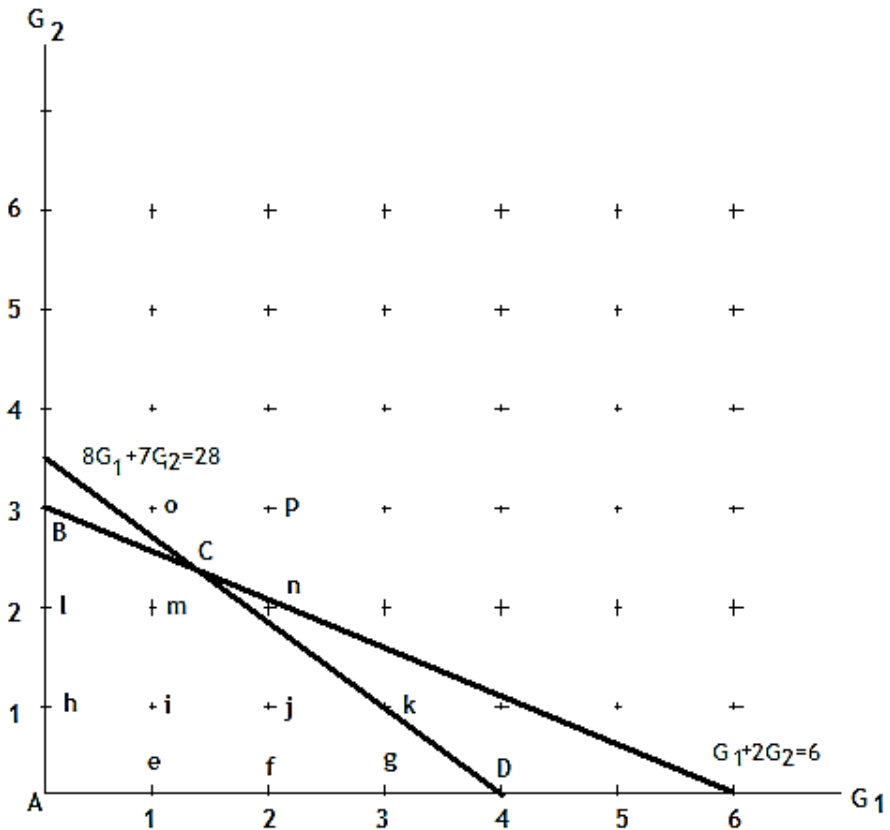
$$G_1 + 2G_2 \leq 6$$

$$8G_1 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0, \text{entero}$$

El requisito de entero es evidente, ya que es difícil suponer que se puedan vender unidades sin terminar.

La solución gráfica se obtiene como en el caso anterior, haciendo igualdades con las desigualdades y graficando el área de soluciones factibles. La única diferencia es que en este caso se señalan en el mismo gráfico los puntos que corresponden a números enteros para cada una de las dos variables, con letras minúsculas para diferenciarlos de los vértices que están con mayúsculas.



Resolvemos como lo hicimos en el problema de los alcoholes, analizando cada vértice y calculando Z en cada uno de ellos.

vértice	G1	G2	Z	Obs
A	0	0	0	Solución trivial
B	0	3	360	Subóptimo
C	1,555	2,222	391	Óptimo "relajado"
D	4	0	320	Subóptimo

Con la palabra "relajado" queremos indicar que, en ese punto, no tenemos en cuenta la restricción de números enteros.

La primera intención podría ser redondear 1,5 a 2 y 2,22 también a 2. Si observamos el gráfico, el punto de coordenadas (2;2) es el marcado como "n" y no está dentro del espacio de soluciones factibles, por lo cual habría que optar por "m", "j" o por "k". Y allí

fracasa el método de redondeo: implica buscar y encontrar el valor de varios vértices y analizar uno por uno.

Para seguir un método construimos una tabla con los valores de cada uno de los planes de producción, donde NO están los puntos “h”, “l”, “i”, “e”, “f” y “g”, para que se vea más claro el conjunto.

vértice	G1	G2	Z	Obs
A	0	0	0	Solución trivial
B	0	3	360	Óptimo
C	1,555	2,222	391	Óptimo “relajado”
D	4	0	320	Subóptimo
m	1	2	320	Subóptimo
j	2	1	280	Subóptimo
k	3	1	360	óptimo

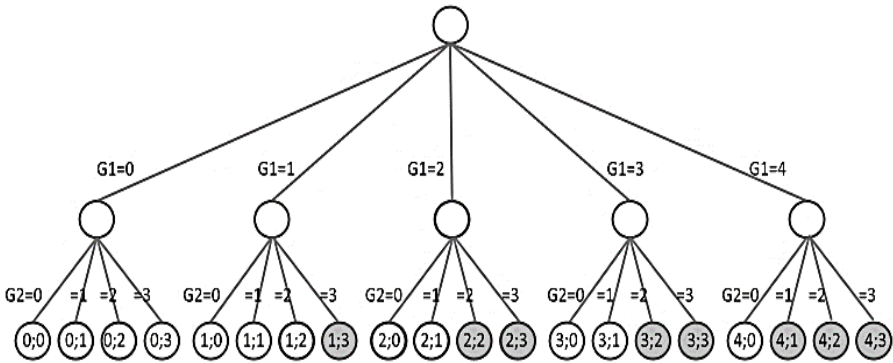
Descubrimos así que los puntos de operación óptimos son, en realidad, el vértice “D” (fabricar tres unidades de G2) o el vértice “k” (tres de G1 más una de G2) y ambos están sobre alguna de las rectas de las restricciones, pero realmente “alejados” de los valores del verdadero óptimo (“C”). Los puntos “m” y “j” son cercanos, en cambio a 1,5 y 2,2 pero no son los provocan el mayor valor en Z.

En realidad, para construir un algoritmo que sirva para resolver este problema deberíamos prever que examinara todas las soluciones del espacio de soluciones factibles que sean combinaciones de valores enteros para las variables de decisión, ya que parece que es muy difícil saber si el óptimo no entero verdadero está cerca o no de un vértice entero que nos interese, (digamos, el punto m en el caso analizado) o de otro vértice.

Por ello, resulta evidente que necesitamos establecer un método de examen de los vértices, por ejemplo:

- primero, saber cuáles son todas las soluciones enteras posibles y
- luego, identificar aquella o aquellas que dan un valor en el funcional óptimo (el máximo o el mínimo valor)

En ese camino, podríamos hacer un listado de todos los valores posibles de G1 y, para cada uno de ellos, enumerar los tres valores posibles de G2, lo que hace un total de 20 combinaciones. Representándolo gráficamente:



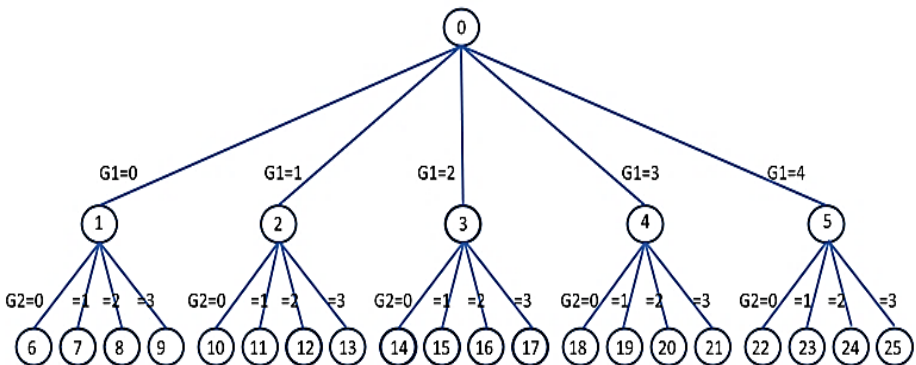
La fila inferior representa los 20 posibles pares $(x;y)$, de los cuales deben descartarse algunos que no están en el área de soluciones factibles (nodos sombreados)

Cuando pensamos en el tamaño que puede tener un análisis como este si se diera el caso, por ejemplo, de un problema con 10 variables que pudieran valer entre 0 y 9 cada una de ellas restringidas a valores enteros, nos encontramos con que habría que examinar 10.000.0000.000 nodos para hallar la solución.

Obviamente, sería poco práctico intentarlo, por lo cual proponemos, alternativamente, cambiar la manera de examinar cada uno de los nodos.

Para ver el nuevo método que proponemos, comenzaremos ayudándonos numerando cada nodo.

Si tomamos un nodo cualquiera, supongamos el nodo 4, allí la variable G_1 vale 3, por lo cual se podría plantear un problema de programación lineal, común, sin la restricción de números enteros aplicado a ese nodo y con una variable menos, ya que G_1 es una constante.



$$Z = 80 \times 3 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$3 + 2G_2 \leq 6$$

$$8 \times 3 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

Por lo tanto, la propuesta es reemplazar cada nodo con un problema de programación lineal a variable no negativa **continua** y reemplazando en cada caso la variable G_1 por el valor que asume en ese nodo.

Para comenzar, veremos el resultado del nodo cero, sin la restricción entera. (como ya fue resuelto al comienzo):

$$Z = 80G_1 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$G_1 + 2G_2 \leq 6$$

$$8G_1 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

En WinQSB obtenemos $G_1 = 1,5556$ y $G_2 = 2,2222$ para un valor $Z = 391,1111$.

Supongamos ahora que establecemos para G_1 un valor fijo superior al óptimo, por ejemplo, $G_1 = 3$ y se intenta resolver el problema resultante. (Nos ubica en el NODO 4):

$$Z = 80 \times 3 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$3 + 2G_2 \leq 6$$

$$8 \times 3 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

Obtenemos que G_2 vale 2 para $G_1 = 3$, lo que está por encima de los valores hallados como máximo irrestricto en enteros (1,556; 2,222), por lo tanto, ese problema no es factible. Entonces el nodo 4 no es factible y todos los nodos por debajo de él serán no factibles (incluyendo el 18). Lo mismo va a ocurrir con los nodos a la derecha (el 5), ya que representan valores aún superiores y fuera del espacio de soluciones factibles.

En consecuencia, de todos los nodos posibles para analizar (desde el 6 al 25), se eliminan los nodos 18 al 25 inclusive ambos, lo cual reduce el espacio de búsqueda.

Nos queda por analizar el conjunto de los nodos 1, 2 y 3, que tienen asociados los siguientes problemas lineales no enteros:

NODO 1

$$Z = 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$0 + 2G_2 \leq 6$$

$$0 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

NODO 2

$$Z = 80 \times 1 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$1 + 2G_2 \leq 6$$

$$8 \times 1 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

NODO 3

$$Z = 80 \times 2 + 120G_2 \equiv \max$$

sujeto a

$$2 + 2G_2 \leq 6$$

$$8 \times 2 + 7G_2 \leq 28$$

$$G_1, G_2 \geq 0$$

Los resultados que se obtienen son:

	G1 (FIJADO)	G2 (calculado)	Z
NODO 1	0	3	360
NODO 2	1	2,5	300
NODO 3	2	2	240

Se observa que el **nodo 1** cumple con las restricciones, incluso con las de enteros, por lo tanto, los nodos que están debajo de él se desechan, ya que no es posible obtener un resultado con Z superior. En esta etapa se eliminan entonces los nodos 6, 7, 8 y 9.

El **nodo 3** también cumple con los requisitos completos, pero el valor de la función objetivo es menor que la del nodo uno, por tanto, todos los nodos debajo de él se desechan ya que no pueden tener un funcional mayor, así se eliminan los nodos 14, 15, 16 y 17.

El **nodo 2** no cumple con todas las restricciones, por lo cual deberían ser analizados los nodos inferiores, pero, al ser el funcional un valor menor que el del nodo cero también

se incluye en la lista de dominados, cosa que no ocurriría si el valor de Z fuera superior al del nodo uno. En ese caso deberían analizarse los nodos inferiores.

Este método adquiere su verdadera dimensión cuando se trabaja con problemas más complejos. El algoritmo que lo resuelve va recorriendo las ramas del esquema y acotando las soluciones posibles. Resolviéndolo con WinQSB indicando que es una variable entera, se carga como un problema normal y se resuelve inmediatamente, sin que el operador perciba que, realmente, ha cambiado el modo de resolución, aunque podemos “espíar” el recorrido por las ramas y los acotamientos que el algoritmo hizo.

Vista del proceso en WinQSB

1. Cargamos el problema normalmente, usando el módulo PL-IP e indicando que las variables son enteras no negativas:

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	80	120		
C1	1	2	<=	6
C2	8	7	<=	28
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Integer	Integer		

2. Seleccionamos en el menú “Solve and Analyse” la opción de ver los pasos mientras se resuelve (*Solve and Display Steps*), con lo cual accederemos a las iteraciones una a una:

Iteration 1						
10-31-2007 17:41:48	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	0	M	1,5556	Integer	No
2	X2	0	M	2,2222	Integer	No
	Current	OBJ(Maximize) = 391,1111		>= ZL =	-M	Non-integer

En el primer paso examinamos el nodo cero que, como vemos, es la solución óptima no restringida en enteros. En el siguiente examinamos el valor de X2 cuando X1 se fija en el entero más cercano (2), que arroja un valor no entero

Iteration 2						
10-31-2007 17:42:30	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	2,0000	M	2,0000	Integer	Yes
2	X2	0	M	1,7143	Integer	No
	Current	OBJ(Maximize) = 365,7143		>= ZL =	-M	Non-integer

Luego se fija X2 en el entero más cercano (2) y se descubre que no es factible (como vimos en el gráfico al inicio)

Iteration 3

10-31-2007 17:43:07	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	2,0000	M		Integer	
2	X2	2,0000	M		Integer	
	This	node	is	infeasible	!!!!!!	

Se fija el valor de X2 en el entero menor al anterior y se resuelve para X1, obteniéndose una solución no entera:

Iteration 4

10-31-2007 17:43:46	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	2,0000	M	2,6250	Integer	No
2	X2	0	1,0000	1,0000	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize) = 330,0000		>= ZL =	-M	Non-integer

Y así iremos viendo todas y cada una de las iteraciones hasta el resultado final:

Iteration 5

10-31-2007 17:44:16	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	3,0000	M	3,0000	Integer	Yes
2	X2	0	1,0000	0,5714	Integer	No
	Current	OBJ(Maximize) = 308,5714		>= ZL =	-M	Non-integer

Iteration 6

10-31-2007 17:44:47	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	3,0000	M		Integer	
2	X2	1,0000	1,0000		Integer	
	This	node	is	infeasible	!!!!!!	

Iteration 7

10-31-2007 17:45:17	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	3,0000	M	3,5000	Integer	No
2	X2	0	0	0	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize) = 280,0000		>= ZL =	-M	Non-integer

- Iteration 8

10-31-2007 17:45:46	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	4,0000	M		Integer	
2	X2	0	0		Integer	
	This node is infeasible !!!!!					

- Iteration 9

10-31-2007 17:46:12	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	3,0000	3,0000	3,0000	Integer	Yes
2	X2	0	0	0	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize) = 240,0000		>= ZL =	-M	New incumbent

- Iteration 10

10-31-2007 17:46:44	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	2,0000	2,0000	2,0000	Integer	Yes
2	X2	0	1,0000	1,0000	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize) = 280,0000		>= ZL =	240,0000	New incumbent

- Iteration 11

10-31-2007 17:47:20	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	0	1,0000	1,0000	Integer	Yes
2	X2	0	M	2,5000	Integer	No
	Current	OBJ(Maximize) = 380,0000		>= ZL =	280,0000	Non-integer

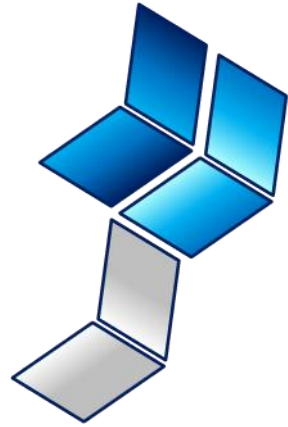
- Iteration 12

10-31-2007 17:47:55	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	0	1,0000	0	Integer	Yes
2	X2	3,0000	M	3,0000	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize) = 360,0000		>= ZL =	280,0000	New incumbent

Iteration 13

10-31-2007 17:48:21	Decision Variable	Lower Bound	Upper Bound	Solution Value	Variable Type	Status
1	X1	0	1,0000	1,0000	Integer	Yes
2	X2	0	2,0000	2,0000	Integer	Yes
	Current	OBJ(Maximize)	= 320,0000	<= ZL =	360,0000	Not better!!





Capítulo 6.

Programación Lineal Binaria. Redes simples. Asignación

La programación binaria es otro caso particular de programación lineal, que se conoce también como “problemas de asignación”. Este nombre deriva del tipo de problemas que se encuentran cuando se pretende asignar, por ejemplo, recursos a tareas de manera tal que para cada recurso se destine una y solo una tarea y cada tarea tenga asignado uno y solo uno de los recursos.

Dadas esas condiciones, nos encontramos frente a un problema en el cual, si se plantea la asignación de un número n de recursos para un número n de tareas, entonces tendremos que revisar un número $n!$ de posibles soluciones.

La forma más segura de resolver un problema así planteado sería tabular cada una de las soluciones y elegir aquella de mínimo costo. Algo similar a lo que ya hicimos antes cuando, para resolver el problema de los alcoholes de manera gráfica, construíamos una tabla de vértices y elegíamos como óptimo aquel que presentaba el valor mayor de Z .

De esta manera, también obtendremos información sobre el segundo menor costo, y así sucesivamente. En contrapartida, la desventaja es que, según lo que estemos buscando, puede ser muy grande el número de soluciones posibles. Por ejemplo, si hay 8 trabajadores a asignar a 8 tareas, el número de posibilidades a examinar, o sea, el número de renglones de la tabla, será

$$8! = 40320.$$

Por ello, una vez más, recurriremos a una forma de programación lineal, denominada Programación binaria, que agrega aún más restricciones que la programación entera y por ello resulta ser más complicada desde el punto de vista del algoritmo si se quiere plantear como programación lineal.

En este caso también tenemos a nuestra disposición un método heurístico que veremos a continuación y que requiere trabajar sobre una matriz cuadrada [recursos – tareas], aun empleando variables ficticias si fuera necesario.

Terminología

Usaremos la siguiente terminología:

Recursos que asignar: M_i . Donde $i = 1, 2, \dots, m$

Tareas a las que se asignan los recursos: N_j . Donde $j = 1, 2, \dots, n$

Costo (beneficio) de asignación del recurso i a la tarea j : C_{ij} .

La función objetivo será maximizante o minimizante y expresará la sumatoria de los productos del costo (beneficio) por la cantidad de recursos asignados

$$z = \sum c_{ij} x_{ij} \equiv \max / \min$$

sujeto a :

$$\sum x_{ij} = 1$$

$$\sum x_{ji} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \forall i, j$$

En este caso es muy importante recordar que al haber adoptado – igual que en el caso de transporte – una terminología matricial no implica que se desvirtuó la esencia de lo visto para programación lineal: sigue siendo la misma estructura de función objetivo. La nomenclatura matricial da una buena visión del problema de redes, pero no altera el concepto visto que sigue siendo aplicado en este caso.

Método Heurístico

Una empresa fabrica cuatro tipos de conservas que pueden ser producidas en cualquiera de las cuatro líneas instaladas. El costo de adecuación y preparación de las líneas para iniciar la producción es alto. Cada producto debe ser elaborado en una sola línea. Los costos de operación se dan en el cuadro. Determinar la asignación de costo mínimo.

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	4	6	3	9
Producto PATO	6	3	6	4
Producto TREBOL	8	6	4	6
Producto TETRA	7	5	6	8

El planteo en formato de programación lineal del problema es

$$Z = 4x_{Bruno-Alfa} + 6x_{Bruno-Beta} + 3x_{Bruno-Gamma} + \dots + 6x_{Tetra-Gamma} + 8x_{Tetra-Delta} = \text{MIN}$$

Sujeto a:

$$\text{Bruno-Alfa} + \text{Bruno-Beta} + \text{Bruno-Gamma} + \text{Bruno-Delta} = 1$$

$$\text{Pato-Alfa} + \text{Pato-Beta} + \text{Pato-Gamma} + \text{Pato-Delta} = 1$$

$$\text{Trebol-Alfa} + \text{Trebol-Beta} + \text{Trebol-Gamma} + \text{Trebol-Delta} = 1$$

$$\text{Tetra-Alfa} + \text{Tetra-Beta} + \text{Tetra-Gamma} + \text{Tetra-Delta} = 1$$

$$\text{Bruno-Alfa} + \text{Pato-Alfa} + \text{Trebol-Alfa} + \text{Tetra-Alfa} = 1$$

$$\text{Bruno-Beta} + \text{Pato-Beta} + \text{Trebol-Beta} + \text{Tetra-Beta} = 1$$

$$\text{Bruno-Gamma} + \text{Pato-Gamma} + \text{Trebol-Gamma} + \text{Tetra-Gamma} = 1$$

$$\text{Bruno-Delta} + \text{Pato-Delta} + \text{Trebol-Delta} + \text{Tetra-Delta} = 1$$

Todas las variables deben asumir el valor 0 o 1

Resolución: seguiremos los siguientes pasos

1. determinamos el costo mínimo de cada columna:

	4	3	3	4
--	---	---	---	---

2. Restamos ese valor en los demás costos de la misma columna:

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	$4-4=0$	$6-3=3$	$3-3=0$	$9-4=5$
Producto PATO	$6-4=2$	$3-3=0$	$6-3=3$	$4-4=0$
Producto TREBOL	$8-4=4$	$6-3=3$	$4-3=1$	$6-4=2$
Producto TETRA	$7-4=3$	$5-3=2$	$6-3=3$	$8-4=4$

3. Tachamos todos los ceros con la menor cantidad posible de líneas rectas. Si el número de líneas rectas es menor que el rango de la matriz (n° de filas o de columnas), debe continuarse con el algoritmo:

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	4	3	1	2
Producto TETRA	3	2	3	4

Para facilitar la lectura, hemos transformado las líneas en sombreado, así, la tabla anterior queda de esta manera:

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	4	3	1	2
Producto TETRA	3	2	3	4

Como encontramos un número de líneas rectas (2) menor que el rango de la matriz (4), debemos continuar.

4. En la tabla, a cada una de las celdas no tachadas, le restamos el costo mínimo de cada renglón.

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	3	2	0	1
Producto TETRA	1	0	1	2

5. Cubrimos nuevamente todos los ceros con el menor número posible de líneas rectas:

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	3	2	0	1
Producto TETRA	1	0	1	2

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	3	2	0	1
Producto TETRA	1	0	1	2

Como el número de rectas es igual al número de elementos lado de la matriz cuadrada, **se ha llegado a un óptimo.**

Si esto no fuera así deberíamos continuar hasta resolver el problema siguiendo estos pasos:

- sobre la matriz remanente (los elementos no tachados) seleccionar el menor.
- restar ese valor de todos aquellos elementos no cruzados por líneas
- sumar ese valor a todos aquellos elementos que caen en intersecciones de líneas.
- no cambiar los demás elementos.
- volver al punto 1 y seguir iterando.

6. Para finalizar el método: marcamos un solo cero en cada renglón y en cada columna, que, para el caso que tengamos más de uno, seguiremos este orden de prioridades:

- El único cero presente en su fila y en su columna (no hay en el ejemplo)

- b. El único cero en su fila o en su columna (son los cuatro que hay en el ejemplo).
- c. El cero sustituible por otro de su fila o columna

	Línea Alfa	Línea Beta	Línea Gamma	Línea Delta
Producto BRUNO	0	3	0	5
Producto PATO	2	0	3	0
Producto TREBOL	3	2	0	1
Producto TETRA	1	0	1	2

7. Hacer la asignación final en cada uno de los ceros marcados, referido a los costos de la matriz original:

Producto	Línea	Costo
BRUNO	Alfa	4
PATO	Delta	4
TREBOL	Gamma	4
TETRA	Beta	5
COSTO TOTAL		17

Problema de maximización

La empresa de conservas “*Mucho*” decide crear cuatro nuevos puestos de trabajo, (un supervisor para cada línea) y entrevista a cinco idóneos, efectuando pruebas de habilidad y aptitud para cada línea, calificándose su desempeño de 1 a 10. Los resultados de las pruebas son:

	Alfa	Beta	Gamma	Delta
Juan	6	9	5	7
Pedro	5	1	7	5
José	2	6	9	9
Oscar	2	9	7	3
Beto	4	5	6	6

Como no es una matriz cuadrada creamos un puesto ficticio (F), para el cual establecemos que todos los candidatos personas califican con cero.

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	6	9	5	7	0
Pedro	5	1	7	5	0
José	2	6	9	9	0
Oscar	2	9	7	3	0
Beto	4	5	6	6	0

El algoritmo de resolución es:

Ubicamos el valor máximo de la tabla, que es 9 en nuestro ejemplo. A este valor se le resta cada uno de los valores correspondientes a cada celda: ($C_{ij} = \text{MAX}$)

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	3	0	4	2	9
Pedro	4	8	2	4	9
José	7	3	0	0	9
Oscar	7	0	2	6	9
Beto	5	4	3	3	9

A partir de esta tabla se procede como en una minimización:

Restar los mínimos por columna

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	4	2	0
Pedro	1	8	2	4	0
José	4	3	0	0	0
Oscar	4	0	2	6	0
Beto	2	4	3	3	0

Cruzar todos los ceros con el menor número posible de líneas

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	4	2	0
Pedro	1	8	2	4	0
José	4	3	0	0	0
Oscar	4	0	2	6	0
Beto	2	4	3	3	0

Son cuatro líneas, que es menos que el número de filas o columnas.

El paso siguiente sería restar el mínimo de cada fila, pero como en este caso tenemos que todos los valores de la columna F son nulos, lo que le hace perder sentido a esa operación (no cambiaría ningún valor). Entonces vamos a seleccionar el valor más pequeño no cruzado por una línea. Ese valor será restado a todos los demás no cruzados y sumado a todos los que están en intersecciones. Los demás se dejan iguales:

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	4	2	1
Pedro	0	7	1	3	0
José	4	3	0	0	1
Oscar	4	0	2	6	1
Beto	1	3	2	2	0

Se vuelve a cruzar el menor número de líneas posibles por todos los ceros:

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	4	2	1
Pedro	0	7	1	3	0
José	4	3	0	0	1
Oscar	4	0	2	6	1
Beto	1	3	2	2	0

Como seguimos obteniendo cuatro líneas, haremos una nueva iteración

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	3	1	1
Pedro	0	7	0	2	0
José	5	4	0	0	2
Oscar	4	0	1	5	1
Beto	1	3	1	1	0

Nuevamente trazamos las líneas que cubran todos los ceros.

	Alfa	Beta	Gamma	Delta	F
Juan	0	0	3	1	1
Pedro	0	7	0	2	0
José	5	4	0	0	2
Oscar	4	0	1	5	1
Beto	1	3	1	1	0

Como ahora hemos obtenido cinco líneas sabemos que hemos llegado al óptimo, por lo cual debemos seleccionar celdas nulas, a razón de una para cada columna y cada fila:

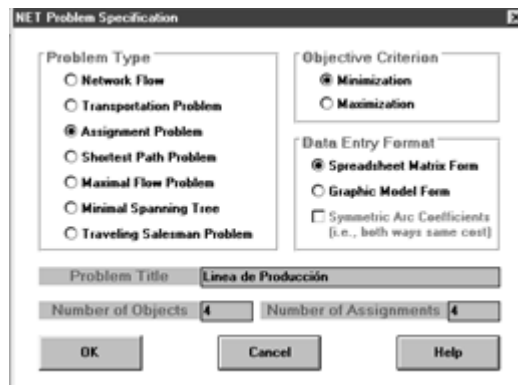
La tabla de asignación final será:

Operario	Línea	Calificación
Juan	Alfa	6
Pedro	Gamma	7
José	Delta	9
Oscar	Beta	9
Beto	F	0
UTILIDAD TOTAL		31

Resolviendo programación binaria con WinQSB

Primer caso: líneas de producción

Si bien es cierto que con WinQSB es perfectamente posible resolver estos problemas con el módulo Programación Lineal/Entera (LP/IP), en cuyo caso se resolverá con el método Simplex, también puede resolverse en forma heurística. Para hacerlo de esta manera debemos ingresar al módulo de redes, y seleccionar problema de asignación, minimización con cuatro objetos y cuatro asignaciones a cada uno. En el menú *edit* podremos ingresar los nombres de los recursos y de las asignaciones:



From \ To	Alfa	Beta	Gamma	Delta
Sone	4	6	3	9
Pato	6	3	6	4
Trebol	8	6	4	6
For	7	5	6	8

La solución del problema la obtendremos en el menú *Solve the problem*.

06-13-2002	From	To	Assignment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Sone	Alfa	1	4	4	0
2	Pato	Delta	1	4	4	0
3	Trebol	Gamma	1	4	4	0
4	For	Beta	1	5	5	0
	Total	Objective	Function	Value =	17	

También podremos hacer un análisis paramétrico y un análisis del tipo *que pasaría si*, exactamente igual que para los casos anteriores. Utilizando el menú *Results, range of optimality* obtendremos lo que buscamos para cada variable:

06-13-2002 12:11:18	From	To	Unit Cost	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. Cost	Allowable Max. Cost
1	Sone	Alfa	4	0	basic	-M	6
2	Sone	Beta	6	4	at bound	2	M
3	Sone	Gamma	3	2	at bound	1	M
4	Sone	Delta	9	6	at bound	3	M
5	Pato	Alfa	6	1	at bound	5	M
6	Pato	Beta	3	0	basic	3	4
7	Pato	Gamma	6	4	at bound	2	M
8	Pato	Delta	4	0	basic	3	4
9	Trebol	Alfa	8	1	at bound	7	M
10	Trebol	Beta	6	1	at bound	5	M
11	Trebol	Gamma	4	0	basic	0	6
12	Trebol	Delta	6	0	basic	6	7
13	For	Alfa	7	0	basic	5	8
14	For	Beta	5	0	basic	4	5
15	For	Gamma	6	2	at bound	4	M
16	For	Delta	8	2	at bound	6	M

Resolviendo programación binaria utilizando el método Simplex en hoja de cálculo

Cualquier aplicación capaz de resolver un problema de programación lineal podrá resolver uno de asignación binaria, solamente es una cuestión de restricciones. Así podemos usar WinQSB, LINDO/LINGO u hojas de cálculo. La única diferencia podría encontrarse en las últimas por eso vamos a enfocarnos en ellas.

Ejemplo

Una sección de la planta tiene 7 turnos y, por convenio, los empleados en cada turno deben trabajar cinco días corridos con dos días de descanso. Los turnos se agrupan según los días de descanso en:

TURNO	DÍAS DE DESCANSO
A	DOMINGO Y LUNES
B	LUNES Y MARTES
C	MARTES Y MIÉRCOLES
D	MIÉRCOLES Y JUEVES
E	JUEVES Y VIERNES
F	VIERNES Y SÁBADO
G	SÁBADO Y DOMINGO

El número total máximo de empleados disponible es de 32, y en principio están asignados 4 a cada turno, excepto para los turnos D y E, que tienen 6 en cada uno. Si se pueden lograr economías hay otros sectores de la planta que tienen déficit de empleados.

Las necesidades de horas son:

Domingo: 22

Lunes: 17

Martes: 13

Miércoles: 14

Jueves: 15

Viernes 18

Sábado: 24

Resolución:

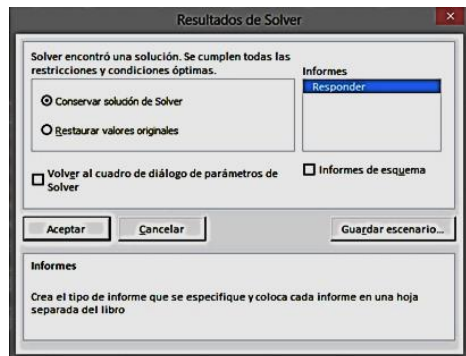
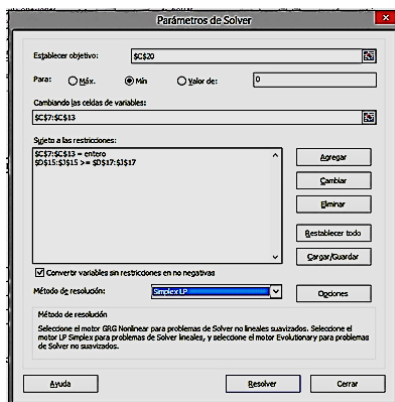
Se completa una hoja de cálculo con todos los datos del problema:

1	1
0	1
=SUMAPRODUCTO(\$C\$7:\$C\$13;D7:D13) =SUMA	
24	17

Planteamos el problema y sus restricciones como se detalla en la siguiente tabla:

Nombre	Celda(s)	Contenido	Observaciones
Celda Objetivo	C20	=C15*C19	Objetivo: minimizar costo
Celdas a cambiar	C7:C13		Empleados en cada horario
Restricciones	C7:C13 >= 0		El número de empleados no puede ser negativo ni fraccionario
	C7:C13 = Entero		
	D15:J15 >= D17:J17		El número de empleados que trabaja cada día debe ser igual o mayor que los que se necesitan
Horarios	D7:J13	0 o 1	El 1 significa que el empleado trabaja ese día
Cálculos básicos	C15	=SUMA(C7:C13)	Es la suma de asignación de horarios
	D15:J15	=SUMA.PRODUCTO(\$C\$7:\$C\$13;D7:D13) (Una expresión en cada celda. La mostrada es para D15, para E15 y las demás hasta J se extiende la mostrada y se reemplazarán los D por E y así hasta J)	Es la cantidad asignada al día

Ejecutamos “Solver” y completamos como en las figuras siguientes:



Luego solicitamos un informe de resultados (si se solicita informe de sensibilidad y de límites trabajando con enteros, Excel informará error en versiones anteriores a 2010 y no avanza en la solución).

La hoja de informe “Responder”, será como la que muestra la figura siguiente.

5										
6	Turno	Días	Empleados	Dom	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab
7	A	Dom-Lun	0	0	0	1	1	1	1	1
8	B	Lun-Mar	5	1	0	0	1	1	1	1
9	C	Mar-Mie	8	1	1	0	0	1	1	1
10	D	Mie-Jue	4	1	1	1	0	0	1	1
11	E	Jue-Vie	7	1	1	1	1	0	0	1
12	F	Vie-Sab	1	1	1	1	1	1	0	0
13	G	Sab-Dom	1	0	1	1	1	1	1	0
14										
15	Totales por turno		26	25	21	13	14	15	18	24
16										
17	Demanda Total			24	17	13	14	15	18	24
18										
19	Salario empleado		40	\$/dia						
20	Costo salario		1040	\$/semana (celda objetivo)						
21										

Donde podemos ver una propuesta de reasignación completa con menor costo total. El informe de respuestas es:

Microsoft Excel 14.0 Informe de respuestas

Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1

Informe creado: 06/08/2013 8:12:54

Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Celda objetivo (Min)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$C\$20	Costo salario Empleados	1280	1040

Celdas de variables

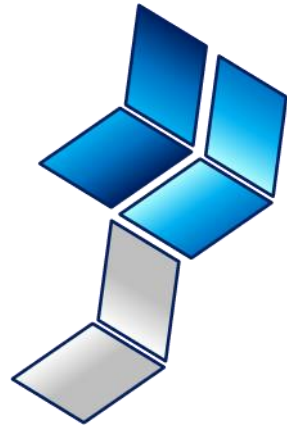
Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$C\$7	Dom-Lun Empleados	4	0	Entero
\$C\$8	Lun-Mar Empleados	4	5	Entero
\$C\$9	Mar-Mie Empleados	4	8	Entero
\$C\$10	Mie-Jue Empleados	6	4	Entero
\$C\$11	Jue-Vie Empleados	6	7	Entero
\$C\$12	Vie-Sab Empleados	4	1	Entero
\$C\$13	Sab-Dom Empleados	4	1	Entero

Restricciones						
Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora	
\$D\$15	Totales por turno Dom	25	$\$D\$15 \geq \$D\17	No vinculante	1	
\$E\$15	Totales por turno Lun	21	$\$E\$15 \geq \$E\17	No vinculante	4	
\$F\$15	Totales por turno Mar	13	$\$F\$15 \geq \$F\17	Vinculante	0	
\$G\$15	Totales por turno Mie	14	$\$G\$15 \geq \$G\17	Vinculante	0	
\$H\$15	Totales por turno Jue	15	$\$H\$15 \geq \$H\17	Vinculante	0	
\$I\$15	Totales por turno Vie	18	$\$I\$15 \geq \$I\17	Vinculante	0	
\$J\$15	Totales por turno Sab	24	$\$J\$15 \geq \$J\17	Vinculante	0	
\$C\$7:\$C\$13=Entero						

A modo de ejercicio:

- 1) Ejecute nuevamente Solver a partir de la solución ya hallada y se encontrará un resultado alternativo en el que se elimina un turno, pero que mantiene el mismo costo.
- 2) Modifique el problema de manera tal que los costos del empleo sean diferentes según el día de descanso asignado.





Capítulo 7.

Programación Lineal en Redes. Problemas de flujo y trasbordo

Los casos vistos en los capítulos anteriores se caracterizaban por ser redes con dos niveles de nodos (orígenes y llegadas) unidos por arcos. Veremos en este capítulo modelos más complejos con niveles de nodos intermedios y con posibilidad de ir de un nodo al otro por caminos con doble sentido de circulación. El mismo caso del modelo de transporte podría plantearse en escenarios más complejos, por ejemplo, rutas (o arcos que unen nodos) con capacidad máxima o mínima, rutas no válidas, etc. Se discutirán algunos casos siguiendo ejemplos demostrativos concretos.

Redes con nodos intermedios. (transporte con trasbordo)

Una empresa fabricante de aceite comestible dispone de tres líneas de refinado, de dos líneas de acondicionado, de dos de desodorizado y de cuatro de envasado. Las líneas de refinado, y sus capacidades de producción, son:

- R1, hasta 200 l/h
- R2, hasta 400 l/h
- R3, hasta 300 l/h

y su capacidad de proceso, son:

- E1 300 l/h
- E2 160 l/h
- E3 140 l/h
- E4 300 l/h.

La producción puede ser enviada a cualquiera de los dos acondicionadores (A1 o A2) que a su vez pueden remitir a cualquiera de los dos desodorizadores (D1 y D2). Ninguno de estos procesos tiene capacidad pulmón y debe despachar todo lo recibido: No tiene problemas de proceso pues están dimensionados para volúmenes mayores que todo el recibo combinado.

E2 y E3 pueden recibir de cualquier acondicionador. Por el lay out existente en la planta, E1 debe recibir desde F1 y E4 solamente de F2.

Se disponen de los costos de bombeo y se busca realizar el plan de distribución de menor costo:

1. Costos de envío de planta a acondicionadores (\$/1000 l)

de planta	A planta	
	A1	A2
R1	2	4
R2	3	4
R3	N/D	5

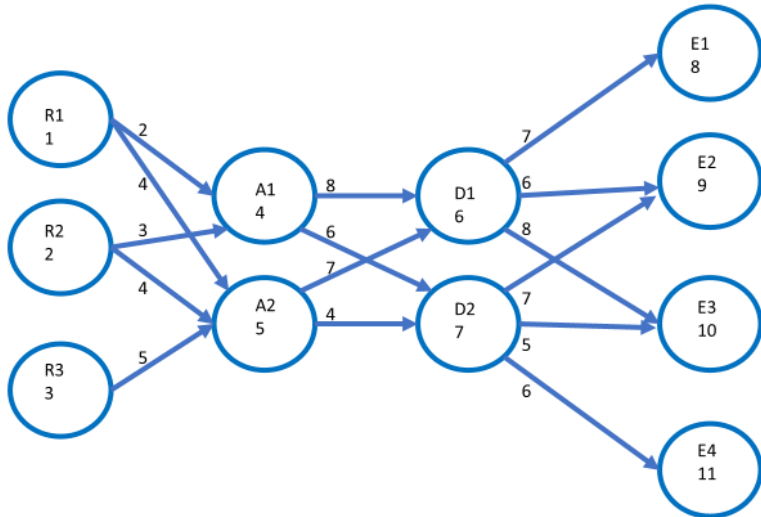
2. Costos de envío de acondicionador a desodorizado

de planta	A planta	
	D1	D2
A1	8	6
A2	7	4

3. Costos de envío de desodorizado a envasado

de planta	A planta			
	E1	E2	E3	E4
D1	7	6	8	N/D
D2	N/D	7	5	6

El diagrama en red resultante es:



El modelo de programación lineal resultante es:

$$\begin{aligned}
 z = & 2x_{1,4} + 4x_{1,5} + 3x_{2,4} + 4x_{2,5} + 5x_{3,5} + \\
 & + 8x_{4,6} + 6x_{4,7} + 7x_{5,6} + 4x_{5,7} + \\
 & + 7x_{6,8} + 6x_{6,9} + 8x_{6,10} + 7x_{7,9} + 5x_{7,10} + 6x_{7,11} \equiv \min
 \end{aligned}$$

sujeto a:

1) Restricciones de oferta

a. De R1 $x_{1,4} + x_{1,5} = 200$

b. De R2 $x_{2,4} + x_{2,5} = 400$

c. De R3 $x_{3,5} = 300$

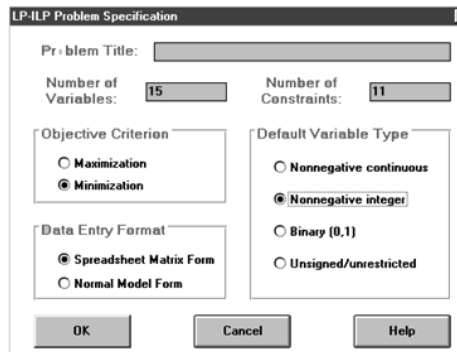
2) Restricciones de acondicionado

- a. De A1 $x_{4,6} + x_{4,7} = x_{1,4} + x_{2,4}$
 que queda: $x_{4,6} + x_{4,7} - x_{1,4} - x_{2,4} = 0$
- b. De A2 $x_{5,6} + x_{5,7} = x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5}$
 que queda: $x_{5,6} + x_{5,7} - x_{1,5} - x_{2,5} - x_{3,5} = 0$
- 3) Restricciones de desodorizado
- a. De D1 $x_{6,8} + x_{6,9} + x_{6,10} - x_{4,6} - x_{5,6} = 0$
- b. De D2 $x_{7,9} + x_{7,10} + x_{7,11} - x_{4,7} - x_{5,7} = 0$
- 4) Restricciones de demanda
- a. De E1 $x_{6,8} = 300$
- b. De E2 $x_{6,9} + x_{7,9} = 160$
- c. De E3 $x_{6,10} + x_{7,10} = 140$
- d. De E4 $x_{7,11} = 300$
- 5) Restricciones lógicas

$$x_{iji} \geq 0 - ent. \forall i, j$$

Podemos encontrar una solución de varias maneras, entre ellas nos interesan dos: la primera, con Excel o Calc usando Solver tratándolo como un problema de programación lineal; la segunda, con WinQSB, usando el módulo de Programación Lineal – Entera; o, la tercera, con ese mismo programa, usando el módulo de redes.

En primer lugar, mostramos WinQSB con el módulo de Programación lineal, seleccionando en el menú “nuevo problema”, la opción “variables enteras no negativas”:



Cargaremos los datos del problema como vemos en la figura siguiente, haciéndolo con cuidado debido al alto número de restricciones y de variables.

Variab	x1.4	x1.5	x2.4	x2.5	x3.5	x4.6	x4.7	x5.6	x5.7	x6.8	x6.9	x6.10	x7.9	x7.10	x7.11	directio	R. H.
Minimi	2	4	3	4	5	8	6	7	4	7	6	8	7	5	6		
deR1	1	1														=	200
deR2			1	1												=	400
deR3					1											=	300
deA1	-1		-1			1	1									=	0
deA2		-1		-1	-1			1	1							=	0
deD1						-1		-1		1	1	1				=	0
deD2							-1		-1				1	1	1	=	0
deE1										1						=	300
deE2											1		1			=	160
deE3												1		1		=	140
deE4															1	=	300
Lower	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
Upper	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
Variab	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

la solución que obtendremos es:

	20:37:05		Thursday	May	09	2013		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	x1.4	200,000	2,000	400,000	0	basic	-M	3,000
2	x1.5	0	4,000	0	1,000	at bound	3,000	M
3	x2.4	100,000	3,000	300,000	0	basic	2,000	3,000
4	x2.5	300,000	4,000	1,200,000	0	basic	4,000	5,000
5	x3.5	300,000	5,000	1,500,000	0	basic	4,000	M
6	x4.6	300,000	8,000	2,400,000	0	basic	6,000	8,000
7	x4.7	0	6,000	0	1,000	at bound	5,000	M
8	x5.6	0	7,000	0	0	at bound	7,000	M
9	x5.7	600,000	4,000	2,400,000	0	basic	-5,000	5,000
10	x6.8	300,000	7,000	2,100,000	0	basic	-M	M
11	x6.9	0	6,000	0	2,000	at bound	4,000	M
12	x6.10	0	8,000	0	6,000	at bound	2,000	M
13	x7.9	160,000	7,000	1,120,000	0	basic	-M	9,000
14	x7.10	140,000	5,000	700,000	0	basic	-M	11,000
15	x7.11	300,000	6,000	1,800,000	0	basic	-M	M
	Objective Function		(Min.) =	13,920,000				

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	deR1	200,0000	=	200,0000	0	-2,0000	200,0000	300,0000
2	deR2	400,0000	=	400,0000	0	-1,0000	400,0000	700,0000
3	deR3	300,0000	=	300,0000	0	0	300,0000	M
4	deA1	0	=	0	0	-4,0000	0	100,0000
5	deA2	0	=	0	0	-5,0000	0	300,0000
6	deD1	0	=	0	0	-12,0000	0	100,0000
7	deD2	0	=	0	0	-9,0000	0	300,0000
8	deE1	300,0000	=	300,0000	0	19,0000	200,0000	300,0000
9	deE2	160,0000	=	160,0000	0	16,0000	0	160,0000
10	deE3	140,0000	=	140,0000	0	14,0000	0	140,0000
11	deE4	300,0000	=	300,0000	0	15,0000	0	300,0000

La diferencia que tiene WinQSB respecto a las otras aplicaciones es que también permite encontrar una solución satisfactoria tratándolo como un problema de redes, mediante el módulo **Network Modeling**. Una vez que accedemos, podemos seleccionar el menú "Nuevo Problema" y allí la opción "Flujo de Red" (*Network Flow*). En este caso vamos a plantear el problema en forma gráfica (*Graphic Model Form*). También debemos incorporar el número de nodos (en la figura correspondiente comprobamos que son 11 nodos)

NET Problem Specification

Problem Type

- Network Flow
- Transportation Problem
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree
- Traveling Salesman Problem

Objective Criterion

- Minimization
- Maximization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)

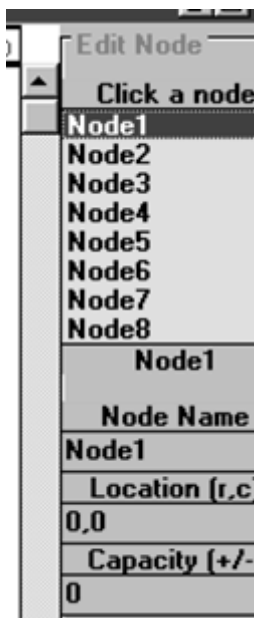
Problem Title:

Number of Nodes:

OK Cancel Help

Luego "dibujamos" la red, mediante la opción *Edit* vamos a seleccionar primero los nodos y luego los arcos. Para cada nodo se puede elegir

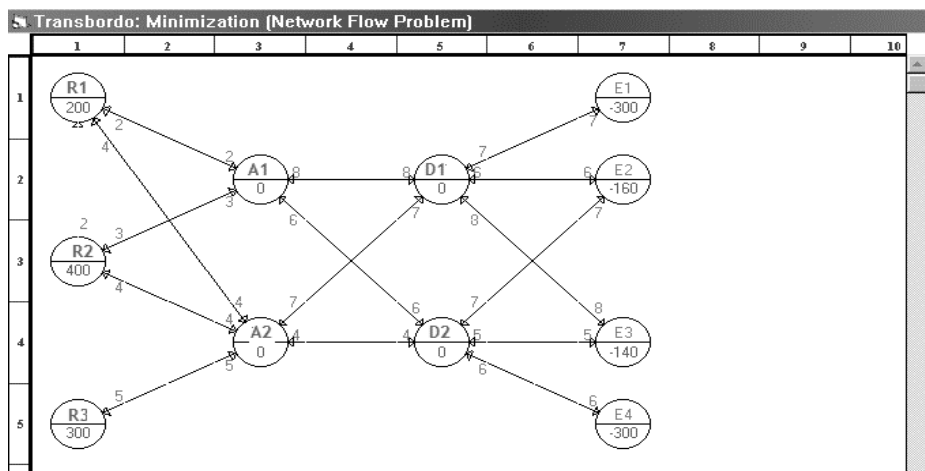
- el nombre,



- la ubicación en el plano de dibujo en coordenadas “renglón, columna”
- y la capacidad: por ejemplo, la capacidad de R1 es 200, la de A1 es cero y la de E1 es – 300, ya que de A salen 200 l/h, en H1 no se almacena nada ni se produce nada y a E1 llegan 300 l/h y no sale nada. Como se ve es un planteo de balance.

El siguiente paso es seleccionar los arcos, usando el menú Edit. El nuevo cuadro de diálogo es más complejo: aparecen dos ventanas cada una de las cuales tiene todo el listado de nodos. Se hace clic sobre un nodo de la ventana superior para seleccionar el nodo origen y se hace clic en la ventana inferior para seleccionar el nodo destino. Una vez seleccionado el par de nodos que configura el arco, se ingresan los datos: coeficiente del arco – en este caso costo de transporte – que, por ejemplo, corresponde sea 2 al arco que une R1 con A1. Luego se puede completar la capacidad mínima o

máxima de transporte, cuyos valores por defecto en el programa son cero – mínima – e ilimitada (M) –máxima–.



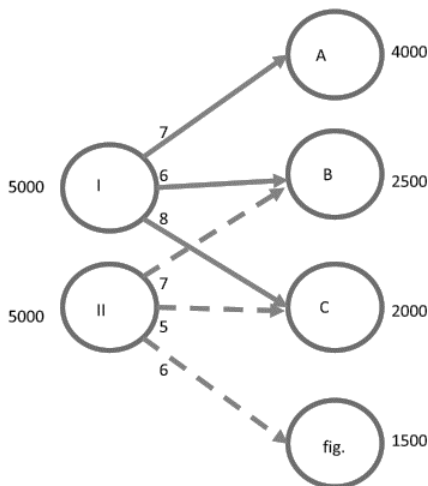
la solución que se encuentra una vez cargados los datos y ejecutado el programa, es:

[Por Transporte: Minimización (Network Flow Problem)]						
08-09-2003	From	To	Flow	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	R1	A1	200	2	400	0
2	R2	A2	400	4	1600	0
3	R3	A2	300	5	1500	0
4	A1	D1	200	8	1600	0
5	A2	D1	100	7	700	0
6	A2	D2	600	4	2400	0
7	D1	E1	300	7	2100	0
8	D2	E2	160	7	1120	0
9	D2	E3	140	5	700	0
10	D2	E4	300	6	1800	0
	Total	Objective	Function	Value =	13920	

También es posible obtener un informe detallado con los costos de oportunidad.

Problemas no equilibrados

Hay dos plantas que producen 5000 unidades anuales cada una. Esa producción es remitida a tres almacenes que demandan 4000, 2000 y 2500 unidades. Los costos de transporte por unidad son:



Plantas	Almacenes		
	A	B	C
I	7	5	10
II	3	11	4

Como primer paso introduciremos un cliente figurado que reciba 1500 unidades de manera tal que el problema ahora sea equilibrado, y le asignaremos un “costo de transporte” compuesto, POR EJEMPLO, por la ganancia por venta de remanentes en fábrica menos los costos de transporte al local y los demás costos de venta. Hemos elegido la venta, pero, evidentemente, también se podría

haber asignado un valor de transporte nulo u otro criterio.

Resolveremos utilizando la forma de Problema de transporte y cargando los datos como sigue,

NET Problem Specification

Problem Type

Network Flow

Transportation Problem

Assignment Problem

Shortest Path Problem

Maximal Flow Problem

Minimal Spanning Tree

Traveling Salesman Problem

Objective Criterion

Minimization

Maximization

Data Entry Format

Spreadsheet Matrix Form

Graphic Model Form

Symmetric Arc Coefficients
(i.e., both ways same cost)

Problem Title: _____

Number of Sources: Number of Destinations:

From \ To	A	B	C	Fig	Supply
I	7	5	10	-5	5000
II	3	11	4	-8	5000
Demand	4000	2000	2500	1500	

la solución que obtendremos será:

06-13-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	I	A	1500	7	10500	0
2	I	B	2000	5	10000	0
3	I	Fig	1500	-5	-7500	0
4	II	A	2500	3	7500	0
5	II	C	2500	4	10000	0
	Total	Objective	Function	Value =	30500	

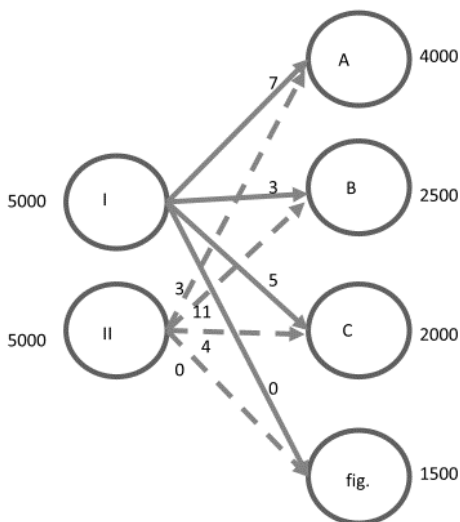
Si no hubiéramos colocado un nodo figurado, al ser no—equilibrado, WinQSB lo hubiese creado automáticamente asignándole un costo de transporte nulo, con lo cual, si bien la solución es correcta, perdemos la posibilidad usar en forma más amplia el modo y enriquecer la solución.

Costos de fabricación diferenciales

La ventaja de WinQSB radica, principalmente, en la enorme facilidad de carga que ofrece en el modelo típico de transporte, y por eso se puede usar para resolver algunos

problemas que sean fácilmente trasladables a ese formato, sin que sean, necesariamente, problemas de transporte.

¿Qué tipo de problemas? veremos un primer ejemplo. Partimos del problema anterior, pero con una pequeña modificación: **la producción de cada una de las plantas puede ser de hasta 5000 unidades.**



Como podemos darnos cuenta es algo así como decir: *“queremos usar la simple tabla de carga de datos de un problema de transporte, pero tenemos una restricción de menor igual...”* Como el problema está desequilibrado, lo equilibraremos, y para eso creamos un nodo figurado con costo de envío cero cuyo significado físico es *“todo aquello que produce la planta I entre lo real y lo que falta para llegar a 5000 unidades es como si se transportara al nodo figurado a costo cero”*

Si este problema se resuelve tal cual como está planteado, se obtiene la solución de enviar 1500 unidades desde I hasta A, 2000 unidades desde I hasta B y 1500 unidades de I a fig, 2500 de II a A y 2500 de II a B. Se interpreta así: la planta I fabricará 1500 unidades menos que las 5000 que podría fabricar y la planta II fabricará las 5000. Se ha resuelto como un problema de transporte (restricciones como igualdad) un problema con desigualdades limitantes.

Pero — como segundo ejemplo — supongamos ahora que los costos de producción de la planta I fueran de \$30 y los de la planta II de \$40 (ambas por unidad). Podríamos resolver un problema de planificación de la producción incorporando los costos de producción al precio del transporte:

From \ To	A	B	C	Fig	Supply
I	37	35	40	0	5000
II	43	51	44	0	5000
Demand	4000	2000	2500	1500	

y, así, obtener la siguiente solución:

06-13-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	I	A	3000	37	111000	0
2	I	B	2000	35	70000	0
3	II	A	1000	43	43000	0
4	II	C	2500	44	110000	0
5	II	Fig	1500	0	0	0
	Total	Objective	Function	Value =	334000	

Otros ejemplos serían: que las ganancias sean diferentes en cada uno de los destinos, o combinaciones de ambas alternativas. Para cada caso en particular podremos “fabricar” el modelo adecuado.

Transporte con capacidad limitada

Si usamos el módulo flujo podemos sacar provecho a la posibilidad de plantear redes con limitaciones superiores o inferiores en la capacidad de transporte de alguno de las rutas (o arcos) y así aprovechar las ventajas de la simplicidad de carga en WinQSB. Por ejemplo:

Hay dos líneas elaboradoras de jugos que deben bombear el producto a los tanques pulmón de cuatro envasadoras. Tenemos la siguiente tabla con los datos de producción, consumo y gastos operativos de envíos en \$ por 1000 litros:

Elaboradores	Tanques pulmón disponibles				Producción (litros/mes)
	A	B	C	D	
I	0,10	0,05	0,07	0,09	300000
II	0,05	0,11	0,08	0,07	500000
Demanda	200000	100000	400000	300000	

Lo resolvemos generando un nodo figurado proveedor del faltante, capaz de “producir” 200000 litros/mes. ¿Cómo se valoriza el costo de transporte? Si la decisión es que no se produce el faltante, no se valoriza, pero si se opta por comprar jugo a terceros, el costo de esa compra puede ser incluido en el transporte, por ejemplo, con valores que tenemos en la tabla siguiente:

Elaboradores	Tanques pulmón disponibles				Producción (litros/mes)
	A	B	C	D	
I	0,10	0,05	0,07	0,09	300000
II	0,05	0,11	0,08	0,07	500000
fig.	21,00	19,00	22,00	20,00	200000
Demanda	200000	100000	400000	300000	

Si resolvemos con WinQSB/módulo de *Redes, Transporte*, obtenemos lo siguiente:

From \ To	A	B	C	D	Supply
I	0.10	.05	.07	.09	300
II	.05	.11	.08	.07	500
Fig	21	19	22	20	200
Demand	200	100	400	300	

06-13-2002	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	I	C	300	0,07	21	0
2	II	A	200	0,05	10	0
3	II	C	100	0,08	8	0
4	II	D	200	0,07	14	0
5	Fig	B	100	19	1900	0
6	Fig	D	100	20	2000	0,00
	Total	Objective	Function	Value =	3953	

Límites en la capacidad de transporte

Al mismo problema, le podemos agregar ahora límites en las capacidades de transporte en determinadas rutas. Supongamos que en el tramo I-C, por el que circulaban 300000 unidades según el resultado mostrado arriba, queremos saber lo que ocurriría si restringimos la circulación a un flujo máximo de 200000 litros/mes (por ejemplo, porque se cambió la bomba).

Para hacerlo, replanteamos el mismo problema usando ahora la opción *Network Flow*, con las siguientes especificaciones al momento de la carga:

NET Problem Specification

Problem Type

- Network Flow
- Transportation Problem
- Assignment Problem
- Shortest Path Problem
- Maximal Flow Problem
- Minimal Spanning Tree
- Traveling Salesman Problem

Objective Criterion

- Minimization
- Maximization

Data Entry Format

- Spreadsheet Matrix Form
- Graphic Model Form
- Symmetric Arc Coefficients (i.e., both ways same cost)

Problem Title: _____

Number of Nodes:

OK Cancel Help

El procedimiento que vamos a seguir es el siguiente: En primer lugar, la planilla de ingreso de datos en formato tradicional debe completarse solamente con los elementos de una matriz de datos válidos, como vemos en la figura:

From \	I	II	FIG	A	B	C	D	Supply
I				.1	.05	.07	.09	300
II				.05	.11	.08	.07	500
FIG				21	19	22	20	200
A								0
B								0
C								0
D								0
Demand	0	0	0	200	100	400	300	

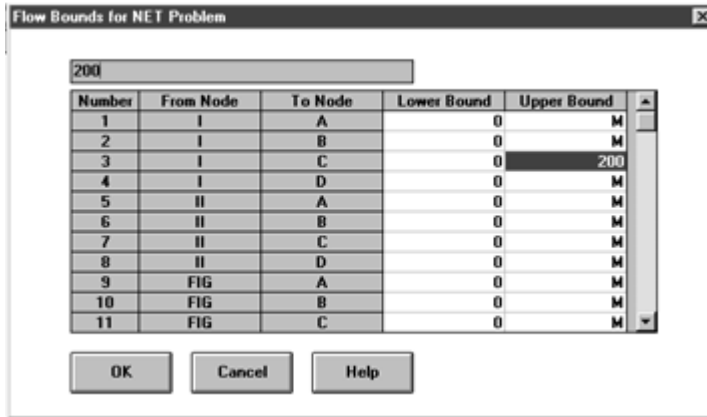
Luego, con el menú *Edit* seleccionaremos las capacidades de flujo:

Network Modeling

Edit Format Solve and Analyze Results

- Cut Ctrl+X
- Copy Ctrl+C
- Paste Ctrl+V
- Clear
- Undo
- Problem Name
- Node Names
- Objective Function Criterion
- Problem Type
- Add a Node
- Delete a Node
- Flow Bounds

De esta manera podemos acceder a un cuadro de ingreso de límites máximos y mínimos de circulación para cada uno de los arcos posibles, en la figura hemos agregado un tope de 200 al arco I-C:



y por último, en el menú *resolver el problema* se obtiene la planilla con los resultados y costos

06-14-2002	From	To	Flow	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	I	C	200	0,07	14	-0,03
2	I	D	100	0,09	9	0
3	II	A	200	0,05	10	0,00
4	II	C	200	0,08	16	0
5	II	D	100	0,07	7	0
6	FIG	B	100	19	1900	0
7	FIG	D	100	20	2000	1,490116E-07
	Total	Objective	Function	Value =	3956	

ahí se verifica que aumenta el costo de transporte y se redistribuye la salida de la planta I, que ahora remite a C y a D.

También puede ocurrir que en determinado momento se “prohíba” una ruta, por ejemplo, porque se averió la bomba. Supongamos que queremos que la ruta I-C la deje de existir (no hay bomba): simplemente se anula el costo de la ruta colocando como coeficiente la letra M, que se interpreta como de costo muy grande y, por tanto, no va a ser nunca elegible para una solución de costo mínimo:

From \ To	I	II	FIG	A	B	C	D
I				0,1	0,05	M	0,09
II				0,05	0,11	0,08	0,07
FIG				21	19	22	20
A							
B							
C							
D							
Demand	0	0	0	200	100	400	300

Más posibilidades en los límites en la capacidad de transporte

Pueden presentarse límites superiores e inferiores en un problema de este tipo. Para ver un ejemplo vamos a modificar un caso ya visto:

Analizaremos dos plantas (**I y II**), cada una de las cuales produce hasta 5000 unidades y tres almacenes (A, B y C) que demandan 4000, 2000 y 2500 unidades. Los costos de transporte son:

Plantas	Almacenes		
	A	B	C
I	7	5	10
II	3	11	4

Lo que cambiamos respecto a la versión original es que colocamos un límite superior a la producción de cada planta. Repasando los resultados anteriores sabemos que:

1. Si los resultados solamente se basaban en los costos de transporte, la planta I debía fabricar menos cantidad (1500), que era la cantidad enviada al cliente figurado.
2. Si el análisis se basaba en costos de producción y de transporte, era la planta II la que absorbía el exceso.

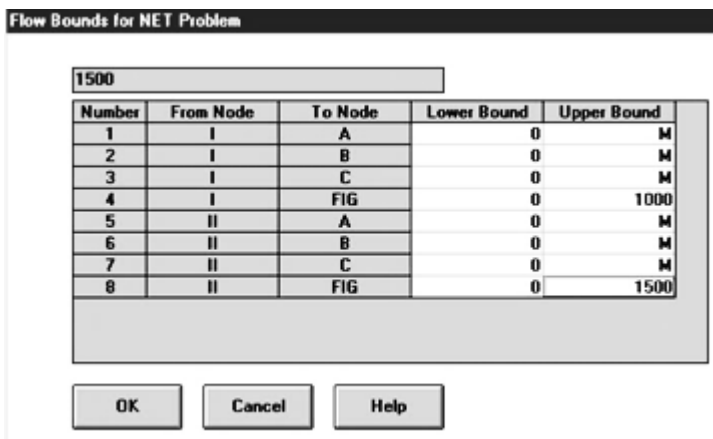
Como tenemos la posibilidad de generar otros límites vamos a agregar –como ejemplo– que las plantas no pueden estar por debajo de un nivel de capacidad de producción determinado, por ejemplo por política empresarial o cuestiones legales, imposibilidades técnicas, etc. Así podrá suponerse que se establece que la planta I debe producir al menos el 80% de la capacidad instalada y la planta II el 75%.

Así hemos transformado el problema a un caso con límites superiores e inferiores:

Planta	Límite Inferior	Límite Superior
I	4000	5000
II	3750	5000

En estas condiciones es evidente que ninguna de las plantas por sí sola puede soportar una reducción de 1500 unidades en su plan de producción, por lo que los dos resultados anteriores no son válidos.

El problema debe replantearse en términos de límites en los flujos de salida de cada planta al nodo ficticio. WinQSB, generará un nodo ficticio si hay desbalanceo (*Unused_Supply*) pero siempre es conveniente que seamos nosotros quienes lo creamos manualmente, de manera tal de tener el control sobre él. En la siguiente figura vemos como sería una carga con un nodo figurado y límites superiores de envíos a los nodos ficticios, que en la realidad serán unidades menos a fabricar en cada origen:



From \ To	I	II	A	B	C	FIG	Supply
I			7	5	10	-5	5000
II			3	11	4	-8	5000
A							0
B							0
C							0
FIG							0
Demand	0	0	4000	2000	2500	1500	

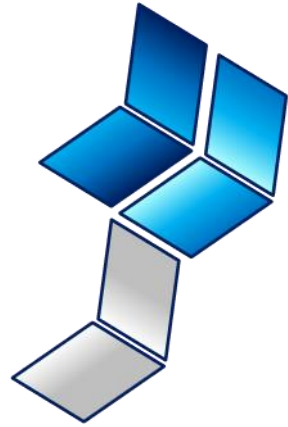
Obtendremos el siguiente resultado:

06-14-2002	From	To	Flow	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	I	A	2000	7	14000	0
2	I	B	2000	5	10000	0
3	I	FIG	1000	-5	-5000	-1
4	II	A	2000	3	6000	0
5	II	C	2500	4	10000	0
6	II	FIG	500	-8	-4000	0
	Total	Objective	Function	Value =	31000	

donde vemos que el sobrante se reparte entre las dos plantas para poder respetar sus límites inferiores.

También debemos tener en cuenta que no es posible resolver un problema mediante límites simultáneamente con la asignación de costos negativos a los tramos que vinculan el nodo figurado. En ese caso el programa no reconocería esos nodos como figurados ya que trataría de llevar a ellos la mayor cantidad posible de unidades, y no detectaría que en realidad es que esas unidades no se fabrican y, por tanto, no se violan los límites inferiores, lo que no es compatible con los objetivos del problema.





Capítulo 8. Redes de Conexión Serie. El problema del viajante de comercio

Es una variante del problema de transporte que se basa en que el proceso se realiza partiendo y llegando a un mismo nodo (la base), pero que recorre todos los demás nodos. Este problema se diferencia del resto en que no hay múltiples arcos simultáneos, sino una cantidad de arcos que deben unir todos los nodos en forma secuencial (en serie) a fin de hallar la secuencia del recorrido que presente el “costo” mínimo y que, por otra parte, no necesariamente los costos son iguales si los arcos se recorren en sentidos opuestos.

En este caso no disponemos de un algoritmo capaz de resolver este tipo de problemas, por ello debemos recurrir a métodos heurísticos.

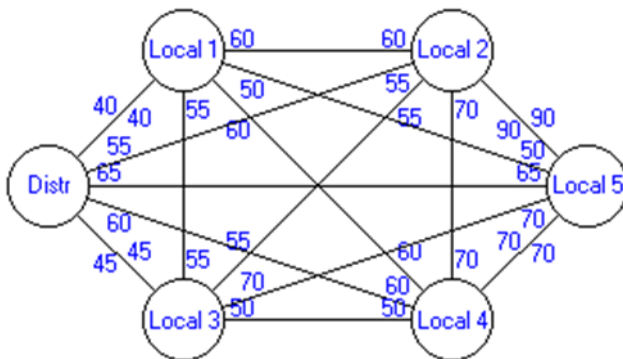
Como en los casos anteriores, veremos ejemplos sencillos. Tengamos presente, además, que cuando usamos el término “costo” referido a los coeficientes de la variable de decisión, debemos pensar en que podemos referirnos a dinero, pero también a tiempo, distancia, gastos, etc. Por eso, en el recuadro de arriba, al decir “no necesariamente los costos son iguales si los arcos se recorren en sentidos opuestos” podemos ver este ejemplo: si el costo es “tiempo de viaje” y el recorrido se puede hacer a la misma hora en uno de los dos sentidos: desde una localidad al centro de la ciudad o desde el centro de la ciudad a esa localidad, es evidente que, si es a la mañana temprano (hora pico hacia el centro), será que la primera opción lleva mucho tiempo porque hay mucho tránsito hacia el centro y en cambio lleva menos tiempo por poco tránsito hacer el trayecto inverso.

Tenemos el caso de una empresa de elaboración y venta en una cadena de locales de empanadas preelaboradas congeladas que diariamente debe hacer entregas en las cinco bocas de la cadena mediante un utilitario. El tiempo de recorrido entre la planta distribuidora y los locales se muestran en la tabla:

	Distrib	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5
Distrib	–	40	55	45	60	65
Local 1		–	60	55	60	50
Local 2			–	55	70	90
Local 3				–	50	70
Local 4					–	70
Local 5						–

El tiempo de detención para descarga en cada local es de 30 minutos ¿es posible hacer

el reparto con un chofer que trabaje 8 horas?



Si este problema se representara en notación nodal debería ser dibujado como en la figura, con arcos con dos flechas, una cada extremo o, como se ve

también en la figura, con los coeficientes (costos) en cada extremo.

Si expresamos el problema en términos de modelo, el siguiente paso será tener en cuenta que, de los 480 minutos disponibles en 8 horas, 150 se emplean en carga y descarga, por tanto, quedan para conducir 330 minutos.

Podemos elegir, para comenzar, un ciclo cualquiera y calcular el tiempo que demanda recorrerlo, por ejemplo, haremos el siguiente:

Distribuidor → Local 3 → Local 4 → Local 5 → Local 2 → Local 1 → Distribuidor

Ese ciclo cumple con los requisitos: visitamos todos los nodos, en forma sucesiva, y volvimos al inicial. El tiempo de transporte es la suma de los tiempos parciales: $45 + 50 + 70 + 90 + 60 + 40 = 355$ minutos, que superan los 330 disponibles. Otro ciclo posible, para comparar, podría ser el siguiente:

Distribuidor → Local 5 → Local 4 → Local 3 → Local 2 → Local 1 → Distribuidor

Que cumple con los requisitos y demanda $65 + 70 + 50 + 55 + 60 + 40 = 340$ que es menor tiempo que el anterior pero aún superior a los 330.

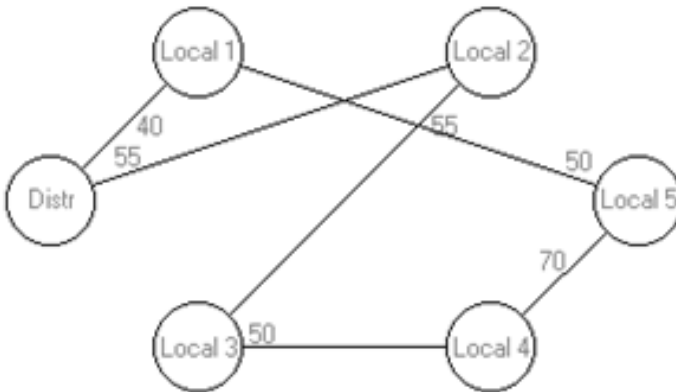
Para determinar si existe un ciclo mejor usaremos WinQSB, módulo de redes y el ítem *Traveling Salesman Problem*. Este problema es de minimización, y lo cargamos con el método matricial o gráfico. Si se opta por el último debemos especificar que los arcos son simétricos (igual coeficiente en ambos sentidos: el costo de ir es igual al de volver) Esta definición hará que se complete la matriz simétricamente como se ve en la figura, aunque se debe ingresar solo un valor para cada par Local–Local:

From \ To	Distr	Local 1	Local 2	Local 3	Local 4	Local 5
Distr		40	55	45	60	65
Local 1	40		60	55	60	50
Local 2	55	60		55	70	90
Local 3	45	55	55		50	70
Local 4	60	60	70	50		70
Local 5	65	50	90	70	70	

Para resolverlo seleccionamos alguno de los métodos disponibles y obtendremos el siguiente recorrido, que no podemos asegurar que sea óptimo, pero sí que es el mejor hallado:

04-28-2003	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Distr	Local 2	55	4	Local 4	Local 5	70
2	Local 2	Local 3	55	5	Local 5	Local 1	50
3	Local 3	Local 4	50	6	Local 1	Distr	40
	Total	Minimal	Traveling	Distance	or Cost	=	320
	(Result	from	Branch	and	Bound	Method]	

cuya solución gráfica es:

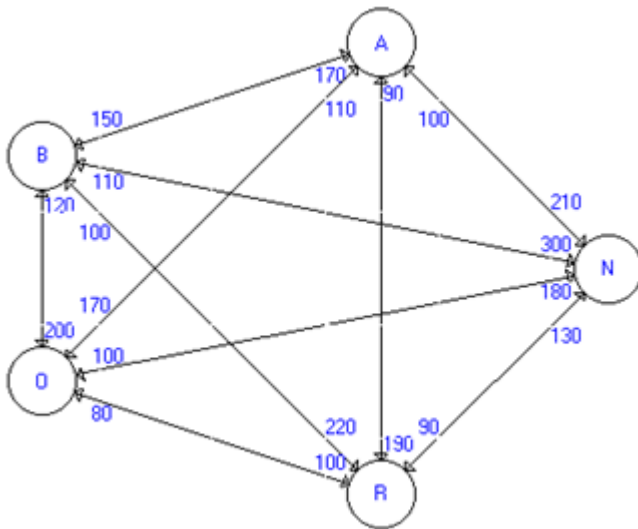


Métodos heurísticos

Veremos uno de los métodos heurísticos que existen para solucionar problemas de este tipo. Tomamos como ejemplo el caso de una **pequeña planta productora de piezas maquinadas que tiene una máquina herramienta capaz de efectuar varias operaciones según como se la configure**. Usando ese equipo se fabrican semanalmente 5 tipos de piezas que son componentes destinados a la industria automotriz. Para pasar de fabricar una pieza a otra se requiere un cierto tiempo de configuración tanto de los cabezales como del programa de control numérico. Esos tiempos dependen de que pieza se acaba de producir y de la pieza que entra en producción y se muestran en la siguiente tabla.

Pasar de producir	A producir:				
	Botadores	Agarraderas	Obturadores	Reguladores	Niveladores
Botadores (B)	–	150	120	100	110
Agarraderas (A)	170	–	110	90	100
Obturadores (O)	200	170	–	80	100
Reguladores (R)	220	190	100	–	90
Niveladores (N)	300	210	180	130	–

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso queda una tabla que no es simétrica, significa que el recorrido en un sentido (ida) no tiene el mismo costo que en sentido inverso (vuelta). El planteo en forma de nodos es el de la figura siguiente:



El objetivo es producir cíclicamente todas las piezas empleando la secuencia que insuma el menor tiempo posible en la preparación de la máquina.

Hasta ahora existen algunos algoritmos que pueden resolver este caso, pero no de una manera eficaz y que resultan poco prácticos en problemas con más de 20 nodos, aun utilizando buenas herramientas de cómputo. Por ello, se han diseñado diferentes heurísticas para estos problemas, las cuales ofrecen soluciones aceptables, pero no pueden asegurar que sean “óptimas” en términos absolutos. Una de ellas es la que usaremos para resolverlo.

Comenzaremos con un ciclo de dos nodos e iremos creando ciclos sucesivamente mayores seleccionando un nuevo nodo y el lugar donde éste se insertará. Como

seleccionamos el par inicial y el nuevo nodo, su lugar de inserción será producto de diferentes métodos.

Por ejemplo, el método de la *inserción menos costosa*:

Para seleccionar el ciclo inicial vamos a buscar aquel cuyo costo sea menor. Observando el diagrama se ve que la conexión más económica es la de **O → R** que vale 80 y de **R → O** que vale 100, entonces construimos un ciclo inicial

$$\mathbf{O \rightarrow R \rightarrow O}$$

Cuyo costo es de $80 + 100 = 180$ minutos.

Luego elegimos un nuevo nodo. Por ejemplo, se podría pensar en el nodo **B**. ¿Dónde se inserta? Hay dos posibilidades:

$$\mathbf{O \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow O}$$

Cuyo costo es $200 + 100 + 100 = 400$, o bien

$$\mathbf{O \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow O}$$

Cuyo costo es $80 + 220 + 120 = 420$

Convendría insertarlo entre **O** y **R**, pero, además, quedan los otros nodos, cada uno de los cuales se debe examinar en todas sus posibles inserciones. De esta manera:

Nodo B	$\mathbf{O \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow O}$	400
	$\mathbf{O \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow O}$	420
Nodo A	$\mathbf{O \rightarrow A \rightarrow R \rightarrow O}$	360
	$\mathbf{O \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow O}$	380
Nodo N	$\mathbf{O \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O}$	330
	$\mathbf{O \rightarrow R \rightarrow N \rightarrow O}$	350

Resulta que lo mejor (menor costo) es insertar el nodo **N** entre **O** y **R**, quedando un nuevo ciclo inicial

$$\mathbf{O \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O}$$

Ahora deben ensayarse inserciones para los nodos restantes:

Nodo B	$\mathbf{O \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O}$	540
	$\mathbf{O \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow O}$	600
	$\mathbf{O \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow O}$	570
Nodo A	$\mathbf{O \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O}$	500
	$\mathbf{O \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow R \rightarrow O}$	500

$O \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow O$

530

Como hay dos posibilidades que tienen el mismo costo, se opta arbitrariamente por una de ellas,

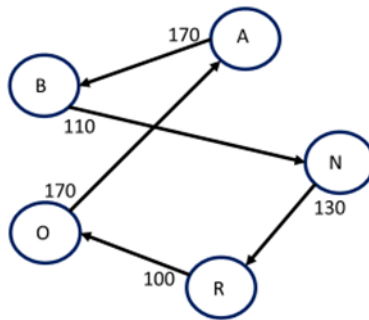
$O \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow R$, y se reinicia el ciclo:

Nodo B	$O \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O$	680
	$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow O$	680
	$O \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow O$	770
	$O \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow O$	740

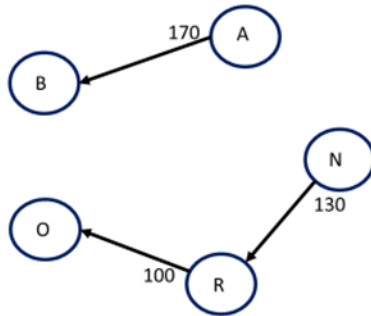
Cualquiera de las dos primeras rutas es la mejor, aunque este ciclo final puede resultar que no es el óptimo.

Heurística de mejoramiento

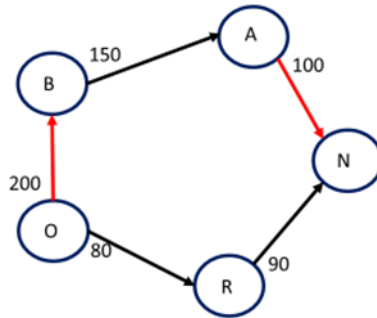
Para mejorar la secuencia que acabamos de encontrar, disponemos de varios métodos, entre ellos el de intercambio de arcos, que consiste en eliminar dos arcos y crear una nueva serie al reemplazarlos. El problema anterior había llegado a la mejor solución, que es la que se ve en la figura:



A continuación, seleccionamos dos arcos no adyacentes, por ejemplo, el $O \rightarrow A$ y el $B \rightarrow N$, con lo cual el ciclo original queda fragmentado en dos partes:

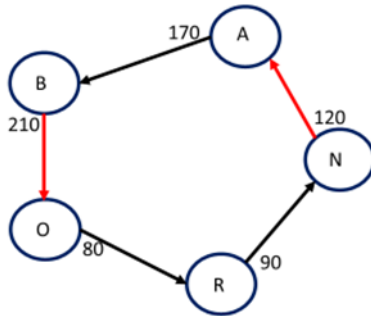


Luego, para reconstruir el ciclo completo, comenzamos trabajando en uno de los dos fragmentos, en el cual invertimos el sentido de los arcos originales y luego añadimos los arcos necesarios para reunir los fragmentos.



Se puede verificar que no existen otros arcos a agregar que los que agregamos (en rojo, en la figura, los que van de **O** a **B** y de **A** a **N**). Calculamos el costo del ciclo resultante, que es de 680.

Si ahora procedemos nuevamente con los dos fragmentos separados, pero invirtiendo el sentido de circulación del otro fragmento y nuevamente reconstruimos, obtendremos el ciclo de la figura, cuyo costo es de 670:



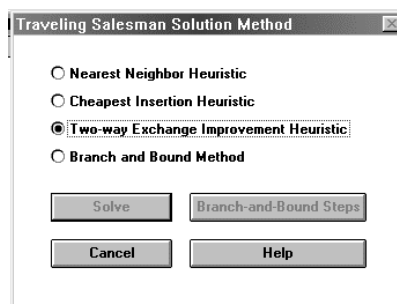
Repetimos este proceso con todas las combinaciones posibles de arcos no adyacentes hasta encontrar aquella que sea la menor posible, que es, justamente, el ciclo de la figura anterior.

Resolviendo con heurística en WinQSB

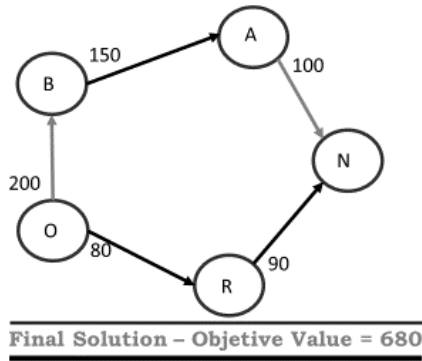
Vamos a ver como procede el mismo problema si tratamos de resolverlo con WinQSB: Comenzamos cargando los datos teniendo cuidado en que sea una tabla no simétrica.

From \ To	B	A	O	R	N
B		150	120	100	110
A	170		110	90	100
O	200	170		80	100
R	220	190	100		90
N	300	210	180	130	

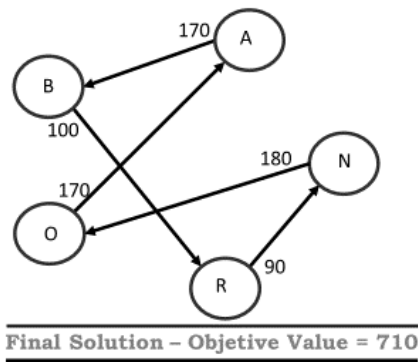
Luego seleccionamos el método de solución que vamos a utilizar seleccionándolo en el cuadro de diálogo de la figura. Vamos a probar que ocurre con diferentes métodos



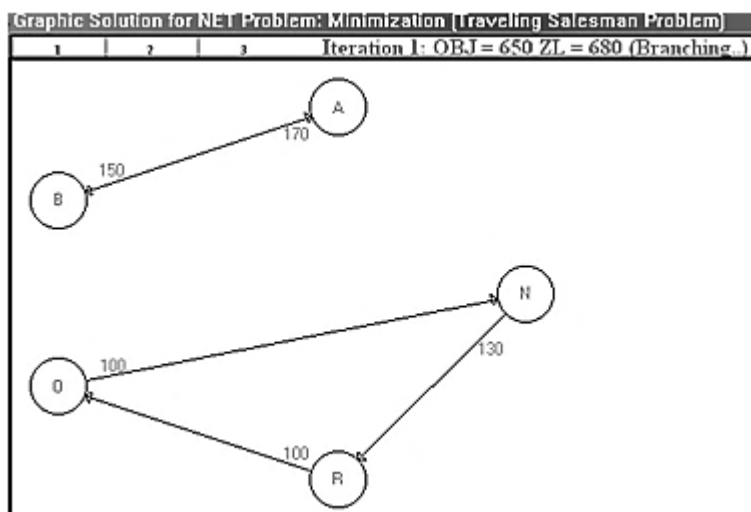
En primer lugar, seleccionamos, del menú *Solve and Analyse*, la alternativa *Heurística de intercambio de dos recorridos* con lo que obtendremos una solución cuyo valor es de 680:



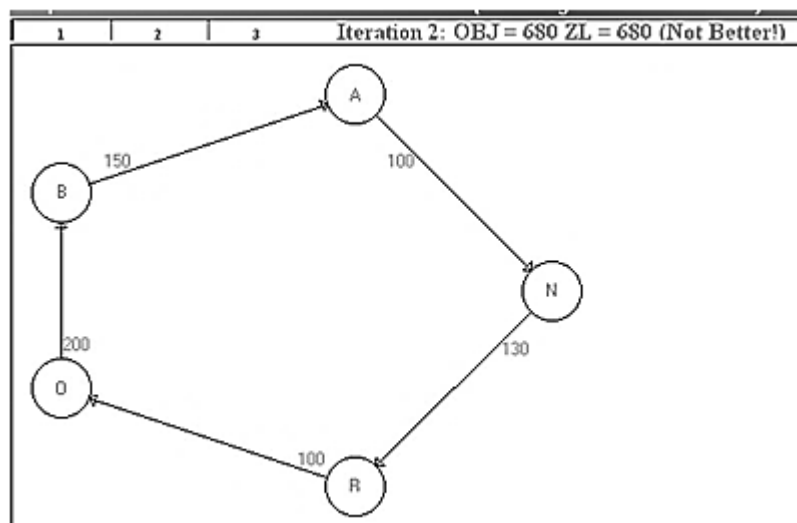
Si usáramos como método de solución la opción de inserción barata (“*Cheapest Insertion...*”) obtendríamos el mismo resultado, mientras que con el de buscar vecinos (“*Nearest Neighbor ...*”) tenemos:



Si por último vamos al método de Corte e inserción (*Branch and Bound Method*) y le pedimos que resuelva mostrando paso a paso, vamos a obtener los siguientes resultados en cada iteración:

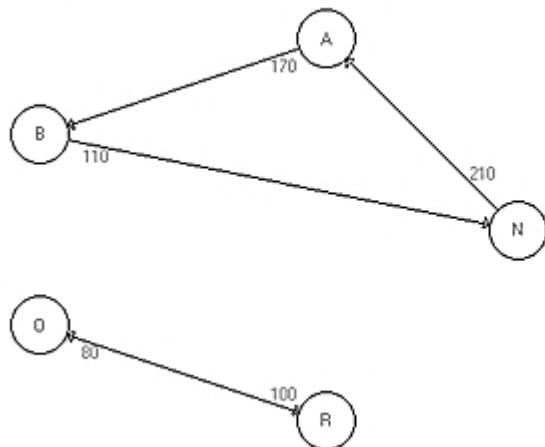


que representa la ruptura del primer ciclo de 680, en dos sectores en forma similar a lo que hicimos más arriba. La siguiente iteración nos muestra un ciclo que sigue teniendo un valor subóptimo:



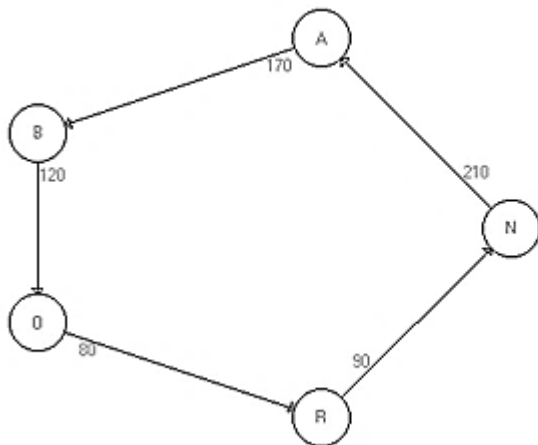
en la siguiente veremos paso será una ruptura sobre el nuevo ciclo:

1	2	3	Iteration 3: OBJ = 670 ZL = 680 (Branching..)
---	---	---	---



y finalmente llegamos al ciclo final, como el hallado manualmente más arriba:

1	2	3	Iteration 4: OBJ = 670 (New Incumbent)
---	---	---	--



Referencias Bibliográficas (Libro 1)

HILLIER, F. S. Y G.J. Lieberman. - Introducción a la Investigación de Operaciones, 8 ED., MC GRAW HILL, México, MEXICO 2007

BRADLEY P.S., U.M. Fayyad Y O. L. Mangarasarian, "Mathematical Programming For Dt Mining: Formulation and Challenges", Journal of Computing, 11(3), 1999.

GASS, S. I., "Model World: Danger, Beware the User as Modeler", Interfaces, 20(3), 1990

PIDD, M., "Just Modeling Through: a Rough Guide to Modeling", Interfaces 29(2), 1999.

LINGO. "The Modeling Language and Optimizer". LINDO Systems Press. Chicago. USA, 2017

SCHARAGE, L. "Optimization Modeling with LINGO". LINDO Systems Press. Chicago, USA. 2003

MAROS I. "Computational Techniques of The Simplex Method", Kluwer Academic Publishers, Boston, USA. 2003

MURTHY, D. N. P., W. P. Page Y E. Y. Rodin, "Mathematical Modeling: a tool for problem solving in engineering, physical, biological and social sciences". Pergamon Press, Oxford, INGLATERRA, 1990

WOLSEY, L. A., "Strong Formulations for Mixed Integer Programs: Valid Inequalities and Extended Formulations". Mathematical Programming Series B, 97(1-2), 2003

ABBAS, A.E. Y R.A. Howard, "Foundations of Decision Analysis" Amazon Kindle ed. Global. Pearson ed. Essex, INGLATERRA. 2016

DANTZIG, G. B. Y M. N. Thapa, "Linear Programming 1: Introduction" Springer, Nueva York, USA 1997.

LINDO. "User's Manual", Lindo Systems Inc. Press, Chicago, USA. 2003

HOWARD, R.A., "The Ethical OR/MS Professional", Interfaces 31(6), 2001

LINGO USER'S GUIDE. Lindo Systems Press Inc. Chicago, USA. 2003

