

CAPÍTULO 12

ESPERANZA MATEMÁTICA PARCIAL (2ª parte)

Sumario: 1. Esperanza matemática parcial en el proceso de POISSON. 2. Esperanza matemática parcial en el proceso de BERNOULLI. 3. Esperanza matemática parcial en las extracciones sin reposición. 4. Varianza de una función lineal por tramos y de una variable truncada. 5. Apéndice. 5.1. Demostraciones de las expresiones de la esperanza matemática parcial de x^2 . 5.2. Demostraciones de las expresiones de $H(r)$ y de $H_2(r)$ para las distribuciones discretas. 6. Problemas.

1. ESPERANZA MATEMÁTICA PARCIAL EN EL PROCESO DE POISSON

En el capítulo anterior, dedicado a los problemas de Esperanza Matemática Parcial en variables continuas, vimos la expresión correspondiente a la distribución Gamma:

$$(12.1) \quad H(x) = r\beta F_g(x \setminus r+1; \beta)$$

Ello no obstante, el concepto es también extensivo al caso de las variables discretas. Así, para la distribución de POISSON, tenemos:

$$(12.2) \quad H_{po}(r \setminus m) = \sum_{i=0}^r i P_{po}(i \setminus m) = \sum_{i=0}^r i \frac{m^i e^{-m}}{i!} = m F_{po}(r-1 \setminus m)$$

La demostración es en este caso muy simple y la veremos en el Apéndice. Advierta que, como es natural, esta expresión tiende a m para $r \rightarrow \infty$, ya que m es la media de la variable de POISSON. También tenemos

$$(12.2') \quad J_{po}(r \setminus m) = \sum_{i=r}^{\infty} i P_{po}(i \setminus m) = \sum_{i=r}^{\infty} i \frac{m^i e^{-m}}{i!} = m - H_{po}(r-1 \setminus m) = m - m F_{po}(r-2 \setminus m)$$
$$= m[1 - F_{po}(r-2 \setminus m)] = m G_{po}(r-1 \setminus m)$$

y, para un intervalo $r_1 \leq r \leq r_2$

$$(12.2'') \quad \sum_{i=r_1}^{i=r_2} i P_{po}(i \setminus m) = H(r_2) - H(r_1 - 1)$$

Ejemplo 1. Una empresa produce una tela especial a un costo de fabricación de 30 \$/metro y con una media de 1 falla cada 20 metros. Esta tela se corta para la venta en piezas de 60 m de longitud. Las piezas con menos de 3 fallas, que se reparan, se venden a 69 \$/m. Las piezas con 3 o más fallas no se reparan y se venden con un descuento de 60 \$/falla hasta llegar a la quinta falla. Las piezas con más de 5 fallas tienen un valor residual del 70% de su costo de fabricación. Si el costo de inspección es de 240 \$/pieza y el de reparación 50 \$/falla, ¿cuál es el beneficio esperado por pieza?

La variable aleatoria fundamental del problema (r) es el número de fallas que se encuentran en un rollo de 60 metros, que tiene distribución de POISSON. El beneficio obtenido en una pieza depende del valor que tome dicha variable como sigue

$$\begin{aligned}
 r \leq 2 : \quad B &= 69 \times 60 - 30 \times 60 - 240 - 50r = 2.100 - 50r \\
 3 \leq r \leq 5 : \quad B &= 69 \times 60 - 30 \times 60 - 240 - 60r = 2.100 - 60r \\
 r \geq 6 : \quad B &= 0,7 \times 30 \times 60 - 30 \times 60 - 240 = -780
 \end{aligned}$$

Aplicando el procedimiento habitual, el beneficio esperado será

$$(12.3) \quad E(\mathbf{B}) = 2.100F(2) - 50H(2) + 2.100[F(5) - F(2)] - 60[H(5) - H(2)] - 780G(6)$$

Calculemos los términos de la expresión. Para $m=(1/20) \times 60 = 3$ es

$$\begin{aligned}
 F(2) &= F_{po}(2 \setminus 3) = 0,42319 \\
 F(5) &= F_{po}(5 \setminus 3) = 0,91608 \\
 G(6) &= 1 - F(5) = 0,08392 \\
 H(2) &= 3F_{po}(1 \setminus 3) = 3 \times 0,19915 = 0,59744 \\
 H(5) &= 3F_{po}(4 \setminus 3) = 3 \times 0,81526 = 2,44579
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (12.3) obtenemos $E(\mathbf{B}) = \$1.717,5$.

Ejemplo 2. Las fallas de un proceso de fabricación de alfombra moqueta se presentan aleatoriamente, con una tasa de 1 falla cada 32 metros. La longitud de los rollos es variable, pues queda determinada por la aparición de cada falla si ésta aparece antes de los 20 m, de lo contrario se corta en 20 m. Calcular: a) La longitud media de los rollos. b) El beneficio esperado por rollo si el costo es de 150 \$/m y el precio de venta 220 \$/m para los rollos menores de 10 m y 250 \$/m para los restantes.

a) Llamemos:

t : Longitud necesaria para encontrar una falla

y : Longitud de un rollo

Podemos expresar la relación entre t e y como sigue

$$\begin{aligned}
 t < 20 : \quad y &= t \\
 t \geq 20 : \quad y &= 20
 \end{aligned}$$

La longitud media de los rollos será entonces

$$(12.4) \quad E(y) = \int_0^{20} t f(t) dt + 20 \int_{20}^{\infty} f(t) dt = H(20) + 20G(20)$$

La variable t tiene distribución Exponencial, o sea Gamma de $r=1$, con $\lambda=1/32$. Entonces

$$G(t) = e^{-\lambda t} ; \quad H(t) = r\beta F_g(t \setminus r+1; \beta) = (1/\lambda)F_g(t \setminus r=2; 1/\lambda)$$

$$G(20) = e^{-(1/32) \times 20} = 0,53526$$

$$\begin{aligned}
 H(20) &= 32F_g(20 \setminus r=2; \beta=32) = 32G_{po}(2 \setminus m=20/32) = 32G_{po}(2 \setminus m=0,625) \\
 &= 32 \times 0,1302 = 4,1664
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (12.4), obtenemos $E(y) = 14,87$ metros.

b) El beneficio de un rollo se expresa en función de la variable t como sigue

$$\begin{aligned} t < 10 : & \quad B = (220 - 150)t = 70t \\ 10 \leq t \leq 20 : & \quad B = (250 - 150)t = 100t \\ t > 20 : & \quad B = (250 - 150) \times 20 = 2.000 \end{aligned}$$

El beneficio esperado será entonces

$$(12.5) \quad E(B) = 70H(10) + 100[H(20) - H(10)] + 2.000G(20)$$

Sólo nos falta calcular

$$\begin{aligned} H(10) &= 32F_g(10 \mid r=2; \beta=32) = 32G_{po}(2 \mid m=10/32) = 32G_{po}(2 \mid m=0,3125) \\ &= 32 \times 0,03975 = 1,27214 \end{aligned}$$

Reemplazando en (12.5), obtenemos $E(B) = \$1.449$.

Observación. Un error que suele cometerse al resolver este problema es omitir el último término de (12.5), que vale $2.000G(20) = 2.000 \times 0,53526 = 1.070$ es decir que pesa mucho más que los otros dos términos. El error proviene de considerar erróneamente que, como no hay rollos mayores de 20 metros, lo cual es cierto, no debe considerarse el evento $t > 20$, pero el evento imposible no es sino $y > 20$; la variable t tiene el dominio $(0; \infty)$.

Ejemplo 3 (Problema del ferry). Un servicio de *ferry* para transporte de automóviles tiene una frecuencia de partidas de 1 cada 2 horas o al completarse el ferry si ello ocurre antes. Aunque no se complete en las 2 horas, parte de todos modos, pues lo están esperando en la otra orilla. Cada ferry tiene capacidad para 5 autos y al partir es reemplazado de inmediato por otro que atraca en el muelle. Se sabe además que los arribos ocurren al azar a razón de 3,8 autos por hora. Calcular: a) El lapso medio entre partidas. b) El número medio de vehículos transportados.

Llamemos

t : Tiempo necesario para que lleguen 5 autos

y : Tiempo de salida del ferry

entonces, la relación entre t e y se establece como sigue

$t \leq 2$ horas: $y = t$ (El ferry sale completo)

$t > 2$ horas: $y = 2$ horas (El ferry no se completó pero debe partir)

luego:

$$(12.6) \quad E(y) = \int_0^2 t f(t) dt + 2 \int_2^\infty f(t) dt = H(2) + 2G(2)$$

La variable t tiene distribución Gamma de $r=5$ y $\lambda=3,8$ autos/hora, entonces

$$G(2) = 1 - F_g(2 \mid r=5; \beta = 1/3,8) = 1 - G_{po}(5 \mid m=3,8 \times 2) = F_{po}(4 \mid m=7,6) = 0,12494$$

$$H(2) = r\beta F_g(2 \setminus r+1; \beta) = (5/3, 8)F_g(2 \setminus r'=6; \beta=1/3, 8) = (5/3, 8)G_{po}(6 \setminus m=7, 6) = (5/3, 8) \times 0,76932 = 1,01226$$

Reemplazando en (12.6), obtenemos $E(y) = 1,26$ horas = 1h16min

b) Llamemos ahora

r : Número de autos que llegan en 2 horas

w : Número de autos que lleva el ferry

y entonces:

$$(12.7) \quad r \leq 5 : w = r$$

$$r \geq 6 : w = 5$$

luego

$$(12.8) \quad E(w) = \sum_{r=0}^5 rP(r) + 5 \sum_{r=6}^{\infty} P(r) = H(5) + 5G(6)$$

La variable r tiene distribución de POISSON con $m=3,8$ (autos/hora) $\times 2$ horas=7,6, por lo tanto

$$G(6) = G_{po}(6 \setminus m=7, 6) = 0,76932$$

$$H(5) = H_{po}(5 \setminus m=7, 6) = mF_{po}(r-1 \setminus m) = 7,6F_{po}(4 \setminus m=7, 6) = 7,6 \times 0,12494 = 0,94954$$

Reemplazando en (12.8), obtenemos $E(w) = 4,8$ autos.

Observación. La relación (12.7) también se puede plantear como sigue

$$r \leq 4 : w = r$$

$$r \geq 5 : w = 5$$

y se obtiene el mismo resultado (verifíquelo el lector).

Ejemplo 4. Una mecha para agujerear un tipo de pieza se rompe por causas exclusivamente aleatorias, no por desgaste ni fatiga, a una tasa 0,8 mechas por hora. Al comenzar cada turno de 8 horas, se completa en el pañol un stock de 6 mechas; si se rompen las 6 mechas en el turno, se origina una pérdida medida por el tiempo de parada de máquina, hasta el cambio de turno, pues el pañol está cerrado. Calcular: a) El tiempo medio de parada de máquina por esta razón. b) El número medio de mechas rotas por turno.

a) Llamemos

t : Tiempo necesario para romper 6 mechas

y : Tiempo perdido

Podemos establecer la siguiente relación entre t e y :

$$t < 8 \text{ horas} : y = 8 - t$$

$$t \geq 8 \text{ horas} : y = 0$$

El tiempo medio perdido será

$$(12.9) \quad E(y) = \int_0^8 (8-t) f(t) dt = 8F(8) - H(8)$$

La variable t tiene distribución Gamma con $r = 6$ y $\beta = 1/0,8 = 1,25$ horas, por lo tanto

$$F(8) = F_g(8 \setminus r=6; \beta=1,25) = G_{po}(6 \setminus m=6,4) = 0,61626$$

$$H(8) = r\beta F_g(8 \setminus r'=r+1; \beta) = 6 \times 1,25 F_g(8 \setminus r'=7; \beta=1,25) = 7,5 G_{po}(7 \setminus m=6,4) = 7,5 \times 0,45767 = 3,43256$$

Reemplazando en (12.9), obtenemos $E(y) = 1,5$ horas.

b) Llamemos ahora:

r : Número de mechas que podrían romperse en un turno de 8 horas.

w : Número de mechas realmente rotas en un turno de 8 horas.

La relación entre r y w es la siguiente:

$$(12.10) \quad \begin{aligned} r \leq 6 : w &= r \\ r \geq 7 : w &= 6 \end{aligned}$$

luego

$$(12.11) \quad E(w) = H(6) + 6G(7)$$

La variable r tiene distribución de POISSON de $m = 6,4$, por lo tanto

$$G(7) = G_{po}(7 \setminus m=6,4) = 0,45767$$

$$H(6) = 6,4 F_{po}(5 \setminus m=6,4) = 6,4 \times 0,38374 = 2,45594$$

Reemplazando en (12.11), obtenemos $E(w) = 5,2$ mechas.

Observación. La relación (12.10) también se puede plantear como sigue

$$r \leq 5 : w = r$$

$$r \geq 6 : w = 6$$

y se obtiene el mismo resultado (verifíquelo el lector).

Ejemplo 5. El control de expedición de una tela que se expende en rollos de 400 metros se efectúa revisando todos los rollos, separando aquellos en los que se encuentren 2 fallas; la inspección del rollo se detiene al encontrar la 2ª falla. Se sabe que el proceso productivo trabaja con una tasa de 1 falla cada 1.000 metros. Calcular: a) El número medio de fallas en los rollos separados (que no salen a expedición) y en los no separados. b) El costo medio de muestreo por rollo, sabiendo que la inspección cuesta 0,1\$/metro.

a) El número r de fallas en un rollo es una variable aleatoria con distribución de POISSON de $m = (1/1.000) \times 400 = 0,4$. Los rollos que no salen a expedición tienen 2 o más fallas, cuya media es

$$E(r \setminus r \geq 2) = \frac{J(2)}{G(2)} = \frac{m G_{po}(1 \setminus m)}{G_{po}(2 \setminus m)} = \frac{0,4 G_{po}(1 \setminus m=0,4)}{G_{po}(2 \setminus m=0,4)} = \frac{0,4 \times 0,32968}{0,06155} = 2,14$$

Los rollos que salen a expedición tienen 1 o ninguna falla, cuya media es

$$E(r \setminus r \leq 1) = \frac{H(1)}{F(1)} = \frac{mF_{po}(0 \setminus m)}{F_{po}(1 \setminus m)} = \frac{0,4 \times 0,67032}{0,93845} = 0,286$$

b) Llamemos

x : Longitud necesaria para encontrar 2 fallas

y : Longitud inspeccionada

Podemos establecer la siguiente relación entre x e y :

$$x < 400 : y = x$$

$$x \geq 400 : y = 400$$

La media de la longitud inspeccionada por rollo será:

$$(12.12) \quad E(y) = H(400) + 400G(400)$$

La variable x tiene distribución Gamma de $r = 2$ y $\beta = 1.000$ por lo tanto

$$G(400) = 1 - F_g(400 \setminus r=2; \beta=1.000) = 1 - G_{po}(2 \setminus m=0,4) = F_{po}(1 \setminus m=0,4) = 0,93845$$

$$\begin{aligned} H(400) &= H_g(400 \setminus r=2; \beta=1.000) = 2 \times 1.000 F_g(400 \setminus r=3; \beta=1.000) = \\ &= 2.000 G_{po}(3 \setminus m=0,4) = 2.000 \times 0,007926 = 15,85266 \end{aligned}$$

Reemplazando en (12.12), obtenemos la longitud media inspeccionada por rollo $E(y) = 391,23$ metros y como el costo es 0,1 \$/metro, el costo de muestreo por rollo será de \$ 39,12.

2. ESPERANZA MATEMÁTICA PARCIAL EN EL PROCESO DE BERNOULLI

Para la distribución Binomial, la Esperanza Matemática Parcial izquierda es

$$(12.13) \quad H_b(r \setminus n; p) = \sum_{i=0}^r i P_b(i \setminus n; p) = \sum_{i=0}^r i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

en el Apéndice demostraremos que su expresión es

$$(12.13) \quad H_b(r \setminus n; p) = np F_b(r-1 \setminus n-1; p)$$

También podemos definir la Esperanza Matemática Parcial derecha como

$$(12.13') \quad J_b(r \setminus n; p) = \sum_{i=r}^n i P_b(i \setminus n; p) = \sum_{i=r}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

cuya expresión puede obtenerse a partir de (12.13):

$$J_b(r \setminus n; p) = np - H_b(r-1 \setminus n; p) = np - np F_b(r-2 \setminus n; p) = np [1 - F_b(r-2 \setminus n-1; p)]$$

$$(12.13') \quad J_b(r \setminus n; p) = npG_b(r-1 \setminus n-1; p)$$

Para la distribución de PASCAL, tenemos

$$(12.14) \quad H_{pa}(n \setminus r; p) = \sum_{i=r}^n i P_{pa}(i \setminus n; p) = \sum_{i=r}^n i \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i}$$

En el Apéndice demostraremos que su expresión es

$$(12.14) \quad H_{pa}(n \setminus r; p) = \frac{r}{p} F_{pa}(n+1 \setminus r+1; p)$$

y también

$$J_{pa}(n \setminus r; p) = \frac{r}{p} - H_{pa}(n-1 \setminus r; p) = \frac{r}{p} - \frac{r}{p} F_{pa}(n \setminus r+1; p) = \frac{r}{p} [1 - F_{pa}(n \setminus r+1; p)]$$

$$(12.14') \quad J_{pa}(n \setminus r; p) = \frac{r}{p} G_{pa}(n+1 \setminus r+1; p)$$

Ejemplo 6. Un proveedor ha firmado un contrato para proveer piezas de repuesto en las siguientes condiciones: 1) Cada lote de 100 piezas será revisado totalmente por el comprador, no pagándose las defectuosas; 2) si el número de piezas rechazadas en el lote fuera superior a 10, por cada pieza adicional rechazada se descontará un monto igual a su precio de venta. Dado que hay un 8% de defectuosas, el costo total de producción es de 80 \$/pieza y el precio de venta de 120 \$/pieza, calcular el beneficio medio de los lotes.

Llamemos r al número de defectuosas en el lote de 100 y B al beneficio del lote. La relación entre estas variables es

$$r \leq 10 : B = 120(100 - r) - 80 \times 100 = 4.000 - 120r$$

$$r \geq 11 : B = 120(100 - r) - 80 \times 100 - 120(r - 10) = 5.200 - 240r$$

El beneficio esperado del lote será

$$(12.15) \quad E(B) = 4.000F(10) - 120H(10) + 5.200G(11) - 240J(11)$$

La variable r tiene distribución Binomial de $n=100$ y $p=0,08$, por lo tanto

$$F(10) = F_b(10 \setminus 100; 0,08) = 0,82433$$

$$G(11) = G_b(11 \setminus 100; 0,08) = 0,17567$$

$$H(10) = 100 \times 0,08 \times F_b(9 \setminus 99; 0,08) = 100 \times 0,08 \times 0,83497 = 6,67976$$

$$J(11) = np - H(10) = 8 \times 100 - 6,67976 = 1,32024$$

Reemplazando en (12.15), obtenemos $E(B) = \$3.092$.

Ejemplo 7. Una fábrica de autopartes tiene en cartera un pedido de 210 piezas fundidas. El porcentaje defectuoso es del 11% y por razones técnicas se deben fundir todas las piezas en una sola colada. En el contrato firmado con el cliente se estipula un precio de venta de \$122 por cada pieza hasta las 210 y \$90 por cada pieza excedente. Se establece además que el proveedor

otorgará una bonificación de \$20 por cada pieza faltante hasta las 210. Cada pieza producida tiene un costo de \$92 –sea buena o defectuosa–. a) Si se decide fabricar 250 piezas, ¿cuál es el beneficio esperado del lote? b) ¿Cómo debería proceder para maximizar dicho beneficio?

a) Sea r el número de buenas en el lote de $n=250$. El beneficio será

$$r \leq 210 : B = 122r - 92 \times 250 - 20(210 - r) = 142r - 27.200$$

$$r \geq 211 : B = 122 \times 210 - 92 \times 250 + 90(r - 210) = 90r - 16.280$$

Su valor esperado

$$(12.16) \quad E(B) = 142H(210) - 27.200F(210) + 90J(211) - 16.280G(211)$$

La variable r tiene distribución Binomial de $n = 250$ y $p = 0,89$. Entonces

$$F(210) = F_b(210 \setminus 250; 0,89) = 0,010196$$

$$G(211) = 1 - F(210) = 0,989804$$

$$H(210) = npF_b(r-1 \setminus n-1; p) = 250 \times 0,89F_b(209 \setminus 249; 0,89) = 222,5 \times 0,009558 = 2,12661$$

$$J(211) = np - H(210) = 220,3734$$

Reemplazando en (12.16), obtenemos $E(B) = \$3.744,24$.

b) Para maximizar el beneficio esperado, podemos variar el número n (total) de piezas a fundir y ver qué valor de este parámetro resulta en un beneficio esperado máximo.

Para ello, debemos replantear la función beneficio como sigue

$$r \leq 210 : B = 122r - 92n - 20(210 - r) = 142r - 92n - 4.200$$

$$r \geq 211 : B = 122 \times 210 - 92n + 90(r - 210) = 90r - 92n + 6.720$$

y su valor esperado

$$E(B) = 142H_b(210 \setminus n; 0,89) - (92n + 4.200)F_b(210 \setminus n; 0,89) \\ + 90J_b(211 \setminus n; 0,89) - (92n - 6.720)G_b(211 \setminus n; 0,89)$$

Con planilla EXCEL hemos calculado esta expresión para distintos valores de n y comprobamos que toma valor máximo para $n = 239$, con $E(B) = 3.829,67$.

Ejemplo 8. En un taller se efectúa el control de expedición revisando las cajas que contienen 20 unidades de una pieza estándar. Las cajas se revisan sacando las piezas, una por una y, al encontrar la 2ª defectuosa, la caja se retira de expedición. Esto significa que todas las cajas salen con una o ninguna unidad defectuosa. Se sabe que el proceso productivo trabaja con el 4% de defectuosas. Calcular: a) La probabilidad de que una caja cualquiera sea retirada de expedición. b) La cantidad media de unidades defectuosas que llevan las cajas que salen a expedición y de las que no salen. c) El costo medio de muestreo por caja, si cada pieza tiene un costo de muestreo de \$5.

a) Si bien las extracciones se realizan sin reposición, la probabilidad de defectuosa se mantiene constante en todas ellas, por lo tanto, el número de defectuosas que se encontrarán tiene distribución Binomial de $p=0,04$.

Si en las 20 piezas hay 2 o más defectuosas, la caja es retirada de expedición, por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$G_b(2 \setminus 20; 0,04) = 0,1897$$

b) Las cajas que salen a expedición tienen 0 ó 1 unidad defectuosa. Su cantidad media es

$$\mu_1 = \frac{H_b(1 \setminus 20; 0,04)}{F_b(1 \setminus 20; 0,04)} = \frac{20 \times 0,04 F_b(0 \setminus 19; 0,04)}{F_b(1 \setminus 20; 0,04)} = \frac{0,8 \times 0,4604}{0,8103} = 0,455$$

Análogamente, las cajas que no salen a expedición tienen 2 o más unidades defectuosas, cuya media es

$$\mu_2 = \frac{J_b(2 \setminus 20; 0,04)}{G_b(2 \setminus 20; 0,04)} = \frac{20 \times 0,04 - H_b(1 \setminus 20; 0,04)}{G_b(2 \setminus 20; 0,04)} = \frac{0,8 - 0,8 \times 0,4604}{0,1897} = 2,28$$

c) En el planteo convencional que, como veremos, es incorrecto, la relación entre el número r de defectuosas y el costo C de muestreo es

$$r \leq 1 : \quad C = 5 \times 20 = 100 \quad (\text{Se muestrea toda la caja})$$

$$n \leq 20 \text{ para } r=2 : \quad C = 5n$$

El costo esperado será

$$E(C) = 100 F_b(1 \setminus n=20; p=0,04) + 5 H_{pa}(20 \setminus r=2; p=0,04)$$

$$F_b(1 \setminus n=20; p=0,04) = 0,8103$$

$$H_{pa}(20 \setminus r=2; p=0,04) = \frac{r}{p} F_{pa}(n+1 \setminus r+1; p) = \frac{2}{0,04} F_{pa}(21 \setminus 3; 0,04) = 50 \times 0,04969 = 2,48474$$

Resulta entonces $E(C) = \$93,45$.

Ello no obstante, el costo es algo menor, ya que en la primera desigualdad ($r \leq 1$) está incluido el caso en que al llegar a la pieza 19 no se encuentren defectuosas, pero entonces, no se revisa la siguiente; si sucede esto, el costo no es 5×20 sino $5 \times 19 = 95$. Por lo tanto, la relación se plantea como sigue

$$A: r = 0 \text{ defectuosa en } n = 19 : \quad C = 5 \times 19 = 95$$

$$B: r = 1 \text{ defectuosa en } n = 19 \text{ y buena la vigésima : } C = 5 \times 20 = 100$$

$$C: n \leq 20 \text{ para encontrar 2 defectuosas : } C = 5n$$

Verifiquemos que los 3 acontecimientos son exhaustivos:

$$P(A) = P_b(0 \setminus 19; 0,04) = 0,460419$$

$$P(B) = P_b(1 \setminus 19; 0,04) \times 0,96 = 0,349919$$

$$P(C) = F_{pa}(20 \setminus 2; 0,04) = G_b(2 \setminus 20; 0,04) = 0,189662$$

Vemos que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

El costo esperado será entonces:

$$E(C) = 95 P_b(0 \setminus 19; 0,04) + 100 P_b(1 \setminus 19; 0,04) \times 0,96 + 5 H_{pa}(20 \setminus r=2; p=0,04)$$

Y ya habíamos calculado $H_{pa}(20 \setminus r=2; p=0,04) = 2,48474$, de donde resulta $E(C) = \$91,16$.

Ejemplo 9. Se debe satisfacer un pedido de 8 discos de freno para un prototipo experimental, siendo 0,25 la probabilidad de que uno de ellos está fuera de especificación. El costo de fabricación de cada uno es de \$250 pero si en la partida inicial no se obtienen los 8 buenos, se deberán hacer los adicionales, uno por uno, a un costo de \$400 cada uno, manteniéndose la probabilidad de defectuoso. El comprador paga además \$150 por cada disco bueno sobrante, como un recupero de costo. a) Si se decide fabricar inicialmente 11 discos, ¿cuál es el costo esperado del pedido? b) ¿Cómo se puede optimizar dicho costo?

a) Llamemos r al número de unidades buenas obtenidas en la partida inicial de 11. La relación entre el costo y dicho número r es

$$\begin{aligned} r \geq 8 \text{ en } n = 11 : \quad C &= 250 \times 11 - 150(r - 8) = 3.950 - 150r \\ n \geq 12 \text{ para } r = 8 : \quad C &= 250 \times 11 + 400(n - 11) = -1.650 + 400n \end{aligned}$$

La variable r tiene distribución Binomial de $n = 11$ y $p = 0,75$ y la variable n tiene distribución de PASCAL de $r = 8$ y $p = 0,75$. Por lo tanto, el costo esperado será

$$(12.17) \quad E(C) = 3.950G_b(8 \setminus 11; 0,75) - 150J_b(8 \setminus 11; 0,75) - 1.650G_{pa}(12 \setminus 8; 0,75) + 400J_{pa}(12 \setminus 8; 0,75)$$

Calculemos los términos de esta expresión

$$\begin{aligned} G_b(8 \setminus 11; 0,75) &= 0,713305 \\ G_{pa}(12 \setminus 8; 0,75) &= 1 - G_b(8 \setminus 11; 0,75) = 0,286695 \\ J_b(8 \setminus 11; 0,75) &= 11 \times 0,75 G_b(7 \setminus 10; 0,75) = 8,25 \times 0,775875 = 6,40097 \\ J_{pa}(12 \setminus 8; 0,75) &= (8/0,75) G_{pa}(13 \setminus 9; 0,75) = (8/0,75) F_b(8 \setminus 12; 0,75) = (8/0,75) \times 0,351221 \\ &= 3,74636 \end{aligned}$$

Reemplazando en (12.17), obtenemos $E(C) = \$2.882,90$.

b) La variable de decisión es el número n_0 original, que en a) era 11, pero que podemos variar para modificar el costo esperado. Entonces, debemos replantear las ecuaciones del costo como sigue

$$\begin{aligned} r \geq 8 \text{ en } n = n_0 : \quad C &= 250n_0 - 150(r - 8) = 250n_0 + 1.200 - 150r \\ n \geq n_0 + 1 \text{ para } r = 8 : \quad C &= 250n_0 + 400(n - n_0) = -150n_0 + 400n \end{aligned}$$

El costo esperado será ahora

$$\begin{aligned} E(C) &= (250n_0 + 1.200)G_b(8 \setminus n_0; 0,75) - J_b(8 \setminus n_0; 0,75) - 150n_0G_{pa}(n_0+1 \setminus 8; 0,75) \\ &\quad + 400J_{pa}(n_0+1 \setminus 8; 0,75) \end{aligned}$$

Para $n_0=10$ se obtiene $E(C) = 2.881,80$, que es el mínimo.

Ejemplo 10 (Continuación del Ejemplo 9). Supongamos ahora que, si en la partida inicial de n_0 piezas no se obtienen las 8 buenas requeridas y, como antes, se deben fabricar las adicionales una a una hasta obtenerlas, pero en este lote adicional se tiene una probabilidad de buena diferente de $p_0=0,75$ de las primeras n_0 , que sea ahora $p_1=0,85$. Rehacer el cálculo para $n_0=11$ y obtener el n_0 óptimo.

Llamaremos $k = n - n_0$ a las piezas adicionales a fabricar una a una para llegar a las 8 buenas, en caso de que no se obtengan en las n_0 iniciales. El costo total del pedido será

$$r \geq 8 \text{ en } n = n_0 : \quad C = 250n_0 - 150(r - 8) = 250n_0 + 1.200 - 150r$$

$$r \leq 7 \text{ en } n_0, \text{ o sea } k \geq 1 \text{ para lograr } 8 - r \text{ buenas}$$

$$C = 250n_0 + 400k$$

El costo esperado será:

$$(12.18) \quad E(C) = (250n_0 + 1200) \sum_{r=8}^{n_0} P(r) - 150 \sum_{r=8}^{n_0} rP(r) + 250n_0 \sum_{r=0}^7 P(r) + 400 \sum_{k=1}^{\infty} kP(k)$$

La variable r tiene distribución Binomial de $n = n_0$ y $p = p_0 = 0,75$, por lo tanto

$$\sum_{r=8}^{n_0} P(r) = G_b(8 \setminus n_0; 0,75)$$

$$\sum_{r=8}^{n_0} rP(r) = J_b(8 \setminus n_0; 0,75)$$

$$\sum_{r=0}^7 P(r) = F_b(7 \setminus n_0; 0,75)$$

Finalmente, la variable k tiene distribución de PASCAL cuyo parámetro r' es igual a $8-r$, siendo r aleatorio con distribución Binomial de $n = n_0$ y $p = p_0 = 0,75$; el parámetro p de la variable k es $p_1 = 0,85$. Si supiéramos a priori el valor de r , sería

$$E(k \setminus r) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) = \frac{8-r}{p_1}$$

En el capítulo siguiente veremos que si la distribución de una variable tiene un parámetro aleatorio, su esperanza incondicional se obtiene considerando todos los posibles valores del parámetro y ponderando con sus probabilidades. En nuestro caso es

$$E(k) = \sum_{r=0}^7 E(k \setminus r)P(r) = \sum_{r=0}^7 \left(\frac{8-r}{p_1} \right) P(r) = \frac{1}{p_1} \left[8 \sum_{r=0}^7 P(r) - \sum_{r=0}^7 rP(r) \right]$$

o sea

$$E(k) = \frac{1}{p_1} [8F_b(7 \setminus n_0; 0,75) - H_b(7 \setminus n_0; 0,75)]$$

Reemplazando en (12.18) obtenemos

$$E(C) = 250n_0 + 1.200G_b(8 \setminus n_0; 0,75) - 150J_b(8 \setminus n_0; 0,75) \\ + \frac{400}{p_1} [8F_b(7 \setminus n_0; 0,75) - H_b(7 \setminus n_0; 0,75)]$$

Si fuera $p_1 = p_0 = 0,75$, para $n_0=11$, da $E(C) = \$2.882,90$ y el óptimo se tiene para $n_0=10$, con $E(C) = \$2.881,80$ o sea los resultados obtenidos anteriormente ya que en ese caso ambos enfoques son totalmente equivalentes.

Para $p_1 = 0,85$ y $n_0=11$, da $E(C) = \$2.855,01$ y el óptimo se tiene nuevamente para $n_0=10$, con $E(C) = 2.831,58$. El n_0 óptimo no cambia demasiado para distintos valores de p_1 . Así, por ejemplo, para $p_1=0,99$, es $n_0(\text{óptimo}) = 9$, con $E(C) = 2.774,13$ y para $p_1=0,5$, es $n_0(\text{óptimo}) = 12$ con $E(C) = 2.999,18$.

Ejemplo 11. Una cuadrilla de desmonte está compuesta por 7 hombres, cada uno con su motosierra, y el capataz. Las motosierras se descomponen con cierta frecuencia, razón por la cual, cada una está detenida el 23% del tiempo. Cada vez que una motosierra se descompone, el capataz la repara, quedando durante ese tiempo inactivo el operario. a) A efectos de analizar la conveniencia de comprar una nueva motosierra para aprovechar dicho tiempo de inactividad, se desea calcular en qué porcentaje se incrementará la producción promedio del equipo en caso de comprarse dicha motosierra adicional. b) Generalizar para una cuadrilla de k operarios y una probabilidad p de que una máquina esté detenida y $q=1-p$ de que esté en condiciones de funcionar.

Si se incorporara un operario y una motosierra, el incremento de producción sería $1/7=14,3\%$. Si sólo se incorpora una motosierra pero no un operario, el incremento será algo menor. Vamos a medir la producción como el número promedio de hombres trabajando. Con 7 hombres y 7 motosierras, dicho valor es $np = 7 \times 0,77 = 5,39$. Supongamos ahora que se agrega una motosierra pero no un operario, o sea que hay 7 hombres y 8 máquinas y llamemos

r : Número de motosierras en condiciones de funcionar.

y : Número de motosierras funcionando realmente.

Podemos establecer la siguiente relación entre r e y :

$$r \leq 7 : y = r$$

$$r = 8 : y = 7 \quad (\text{sólo hay 7 hombres})$$

La variable r tiene distribución Binomial con $n = 8$ y $p = 0,77$, por lo tanto el número promedio de máquinas funcionando es

$$E(y) = H_b(7 \setminus 8; 0,77) + 7P_b(8 \setminus 8; 0,77)$$

$$P_b(8 \setminus 8; 0,77) = 0,77^8 = 0,12357$$

$$H_b(7 \setminus 8; 0,77) = npF_b(r-1 \setminus n-1; p) = 8 \times 0,77F_b(6 \setminus 7; 0,77) = 6,16 \times 0,83951 = 5,1714$$

Resulta entonces

$$E(y) = 5,1714 + 7 \times 0,12357 = 6,0364$$

El incremento será

$$\frac{E(y) - np}{np} = \frac{6,0364 - 7 \times 0,77}{7 \times 0,77} = 0,1199 = 11,99\%$$

b) Si hay k operarios y $(k+1)$ motosierras, siendo r el número de máquinas en condiciones de funcionar, el número y de máquinas funcionando es:

$$\begin{aligned} r \leq k : & \quad y = r \\ r = k + 1 : & \quad y = k \end{aligned}$$

Será entonces

$$E(y) = H_b(k \setminus k+1; q) + kP_b(k+1 \setminus k+1; q)$$

Los términos de esta expresión son

$$P_b(k+1 \setminus k+1; q) = q^{k+1}$$

$H_b(k \setminus k+1; q) = (k+1)qF_b(k-1 \setminus k; q) = (k+1)q[1 - P_b(k \setminus k; q)] = (k+1)q(1 - q^k)$
por lo tanto

$$E(y) = (k+1)q(1 - q^k) + k q^{k+1} = q(k + 1 - q^k)$$

La producción del conjunto antes de agregar la motosierra adicional es kq , por lo tanto el incremento porcentual es:

$$\frac{E(y) - kq}{kq} = \frac{q(k + 1 - q^k) - kq}{kq} = \frac{1 - q^k}{k}$$

Verifique el lector que, para $k = 7$ y $q = 0,77$, se obtiene 0,1199.

3. ESPERANZA MATEMÁTICA PARCIAL EN LAS EXTRACCIONES SIN REPOSICIÓN

La esperanza matemática parcial izquierda de la distribución Hipergeométrica es

$$(12.19) \quad H(r) = \frac{nR}{N} F_h(r-1 \setminus n-1; N-1; R-1)$$

y la derecha

$$(12.19') \quad J(r) = \frac{nR}{N} G_h(r-1 \setminus n-1; N-1; r-1)$$

Para la distribución de PASCAL Hipergeométrica es

$$(12.20) \quad H(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} F_{ph}(n+1 \setminus r+1; N+1; R+1)$$

$$(12.20') \quad J(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} G_{ph}(n+1 \setminus r+1; N+1; R+1)$$

Ejemplo 12. Un fabricante entrega su producto en cajas de 50 unidades, en las cuales siempre coloca “honestamente” 3 defectuosas. Sabe que las otras 47 son todas buenas. El comprador toma una muestra de 5 unidades de la caja y, si son todas buenas, la acepta; si encuentra 2 o más defectuosas, la rechaza, pero si encuentra 1 defectuosa, sigue revisando hasta encontrar otra defectuosa –que seguramente encontrará–. La revisión tiene un costo de 20\$/unidad buena y 30\$/unidad defectuosa. Calcular: a) La probabilidad de que una caja sea aceptada. b) El costo medio de muestreo por caja.

a) Una caja sólo puede ser aceptada si en la muestra de 5 no hay defectuosas, o sea

$$P = P_h(0 \setminus 5; 50; 3) = \frac{\binom{3}{0} \binom{50-3}{5-0}}{\binom{50}{5}} = \frac{\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0,72398$$

b) Sea r el número de defectuosas que encuentra en la primera muestra de 5 unidades

$$r = 0: \quad C = 20 \times 5 = 100$$

$$r = 1: \quad C = 20 \times 4 + 30 + 20(n_1 - 1) + 30 = 120 + 20n_1 \quad (n_1 \geq 1 \text{ para encontrar 1 defectuosa en } N=45 \text{ donde hay } R=2 \text{ defectuosas})$$

$$n_2 \leq 5 \text{ para } r=2 \text{ defectuosas: } C = 30 \times 2 + 20(n_2 - 2) = 20 + 20n_2$$

El costo esperado será:

$$(12.21) \quad E(C) = 100P_h(0 \setminus 5; 50; 3) + 120P_h(1 \setminus 5; 50; 3) + 20J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) + \\ + 20F_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3) + 20H_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3)$$

Calculemos los términos de esta expresión

$$P_h(0 \setminus 5; 50; 3) = 0,72398$$

$$P_h(1 \setminus 5; 50; 3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{50-3}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0,252551$$

$$J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) = \frac{r_1(N_1+1)}{R_1+1} G_{ph}(2 \setminus r=2; N=46; R=3)$$

La última G_{ph} vale obviamente la unidad, por lo tanto

$$J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) = \frac{r_1(N_1+1)}{R_1+1} = \frac{1 \times 46}{3} = 15,33333$$

$$F_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3) = G_h(2 \setminus n=5; N=50; R=3) = 1 - F_h(1 \setminus n=5; N=50; R=3)$$

$$= 1 - P_h(0 \setminus 5; 50; 3) - P_h(1 \setminus 5; 50; 3) = 0,023469$$

$$H_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3) = \frac{r(N+1)}{R+1} F_{ph}(n+1 \setminus r+1; N+1; R+1)$$

$$= \frac{2 \times 51}{4} F_{ph}(6 \setminus 3; 51; 4) = 25,5 G_h(3 \setminus n=6; N=51; R=4) = 25,5 [1 - F_h(2 \setminus 6; 51; 4)]$$

$$= 25,5 \{1 - [P(0) + P(1) + P(2)]\} = 25,5 \left\{ 1 - \left[\frac{\binom{4}{0} \binom{51-4}{6-0}}{\binom{51}{6}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{51-4}{6-1}}{\binom{51}{6}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{51-4}{6-2}}{\binom{51}{6}} \right] \right\}$$

$$= 25,5 [1 - (0,59622 + 0,3407 + 0,05942)] = 0,093367$$

Reemplazando en (12.21), obtenemos $E(C) = \$411,71$

Ejemplo 13. (Continuación del Ejemplo 12). Supongamos ahora que el honesto proveedor decide aleatorizar el número R de defectuosas que pone en la caja del siguiente modo: Arroja un dado y si sale as, pone una, si sale 2 ó 3, pone 2 y si sale 4, 5 ó 6, pone 3. Calcular: a) la probabilidad de que una caja sea aceptada, o sea que la muestra de $n = 5$ no tenga defectuosas. b) El costo esperado de muestreo de cada caja, con los mismos valores y procedimiento anteriores.

a) Ahora el parámetro R es aleatorio, con las probabilidades

$$P(R=1) = 1/6 ; \quad P(R=2) = 1/3 ; \quad P(R=3) = 1/2$$

La probabilidad de $r = 0$ defectuosas en la muestra de $n = 5$ será, aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$\begin{aligned} P(r=0) &= \frac{1}{6} P_h(0 \setminus 5; 50; 1) + \frac{1}{3} P_h(0 \setminus 5; 50; 2) + \frac{1}{2} P_h(0 \setminus 5; 50; 3) \\ &= \frac{1}{6} \times 0,9 + \frac{1}{3} \times 0,80816 + \frac{1}{2} \times 0,72398 = 0,7814 \end{aligned}$$

b) Con el mismo concepto, el costo esperado del muestreo es

$$(12.22) \quad E(C) = \frac{1}{6} E(C \setminus R = 1) + \frac{1}{3} E(C \setminus R = 2) + \frac{1}{2} E(C \setminus R = 3)$$

Para R aleatorio, la expresión (12.21) se escribe

$$\begin{aligned} (12.21') \quad E(C \setminus R) &= 100 P_h(0 \setminus 5; 50; R) + 120 P_h(1 \setminus 5; 50; R) + 20 J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=R-1) + \\ &\quad + 20 F_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R) + 20 H_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R) \end{aligned}$$

Ya calculamos el valor $E(C|R=3) = \$411,71$. Con el mismo procedimiento se obtiene

$$E(C|R=1) = \$1.022 \quad ; \quad E(C|R=2) = \$563,67$$

Reemplazamos en (12.22) y obtenemos $E(C) = \$564,08$

4. VARIANZA DE UNA FUNCIÓN LINEAL POR TRAMOS Y DE UNA VARIABLE TRUNCADA

4.1. Función lineal por tramos

Dada la función lineal por tramos (y) de una variable aleatoria continua x , cuya distribución es conocida

$$(12.23) \quad \begin{aligned} x \leq a_1: & \quad y = b_1 + b_2x \\ a_1 < x \leq a_2: & \quad y = b_3 + b_4x \\ x > a_2: & \quad y = b_5 + b_6x \end{aligned}$$

hemos discutido el cálculo de su media:

$$(12.24) \quad E(y) = b_1F(a_1) + b_2H(a_1) + b_3[F(a_2) - F(a_1)] + b_4[H(a_2) - H(a_1)] + b_5G(a_2) + b_6J(a_2)$$

Su varianza se calcula mediante:

$$(12.25) \quad D^2(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$$

Para ello, calcularemos primero y^2 :

$$(12.26) \quad \begin{aligned} x \leq a_1: & \quad y^2 = (b_1 + b_2x)^2 = b_1^2 + 2b_1b_2x + b_2^2x^2 \\ a_1 < x \leq a_2: & \quad y^2 = (b_3 + b_4x)^2 = b_3^2 + 2b_3b_4x + b_4^2x^2 \\ x > a_2: & \quad y^2 = (b_5 + b_6x)^2 = b_5^2 + 2b_5b_6x + b_6^2x^2 \end{aligned}$$

Será entonces:

$$(12.27) \quad \begin{aligned} E(y^2) = & b_1^2F(a_1) + 2b_1b_2H(a_1) + b_2^2 \int_{-\infty}^{a_1} x^2 f(x)dx + \\ & + b_3^2[F(a_2) - F(a_1)] + 2b_3b_4[H(a_2) - H(a_1)] + b_4^2 \int_{a_1}^{a_2} x^2 f(x)dx + \\ & + b_5^2G(a_2) + 2b_5b_6J(a_2) + b_6^2 \int_{a_2}^{\infty} x^2 f(x)dx \end{aligned}$$

Aparecen así las nuevas funciones

$$(12.28) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx ; \quad J_2(x) = \int_x^{\infty} x^2 f(x) dx$$

denominadas Esperanza Matemática Parcial (izquierda y derecha) de x^2 . Se cumple la siguiente relación entre ellas:

$$(12.29) \quad H_2(x) + J_2(x) = E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

El cálculo es específico para cada distribución. Indicamos su expresión para los modelos más importantes.

Distribución Normal

$$(12.30) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = E(x^2) \Phi(Z) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (x + \mu) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) ; \quad Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Distribución Lognormal

$$(12.31) \quad H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = E(x^2) \Phi\left(\frac{\text{Ln } x - m}{D} - 2D\right)$$

Distribución Gamma

$$(12.32) \quad H_2(x) = \int_0^x x f(x) dx = E(x^2) F_g(x \setminus r + 2; \beta)$$

Distribución de WEIBULL

$$(12.33) \quad H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = E(x^2) F_g\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\omega} \setminus r = 1 + \frac{2}{\omega}; \beta' = 1\right]$$

Distribución de PARETO

$$(12.34) \quad H_2(x) = \int_{\theta}^x x f(x) dx = \frac{\psi \theta^2}{\psi - 2} \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\psi - 2} \right]$$

Distribución de GUMBEL del mínimo

$$(12.35) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \theta^2 (1 - e^{-t}) + 2\beta\theta \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t \, dt + \beta^2 \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt$$

$$(12.36) \quad \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t \, dt = (1 - e^{-t}) \text{Ln } t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n! n}$$

$$(12.37) \quad \int_0^t e^{-t} L n^2 t dt = (1 - e^{-t}) L n^2 t + 2 L n t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n! n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n! n^2}$$

$$(12.38) \quad t = \text{Exp} \left(\frac{x - \theta}{\beta} \right)$$

Distribución de GUMBEL del máximo

$$(12.39) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \theta^2 e^{-t} + 2\beta\theta \left(C + \int_0^t e^{-t} L n t dt \right) + \beta^2 \left(C^2 + \frac{\pi^2}{6} - \int_0^t e^{-t} L n^2 t dt \right)$$

$$(12.40) \quad t = \text{Exp} \left(-\frac{x - \theta}{\beta} \right)$$

Distribución empírica dada con una serie de frecuencias

Sea la tabla de frecuencias

X	$a_1 - b_1$	$a_2 - b_2$	...	$a_k - b_k$
F_i	F_1	F_2	...	F_k
$\tau_i \cong F_i X_i$	τ_1	τ_2	...	τ_k

En esta tabla llamamos $X_i = (a_i + b_i)/2$ al punto medio de cada intervalo y τ_i al total efectivo, que se aproxima, si no es dato, como el producto de la frecuencia por el punto medio ($F_i X_i$). Llamamos j al intervalo en que se encuentra x y $h_j = b_j - a_j$ a su amplitud, entonces

$$(12.41) \quad H_2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\tau_i^2}{F_i} + \frac{1}{n} \left[\frac{(x + a_j)^2}{2} \right] \frac{(x - a_j)}{h_j} F_j$$

También podemos definir $H_2(r)$ para las distribuciones discretas.

Distribución de Poisson

$$(12.42) \quad H_2(r) = \sum_{i=0}^r i^2 \frac{m^i e^{-m}}{i!} = m^2 F_{po}(r - 2 \setminus m) + H(r)$$

$$(12.42') \quad J_2(r) = \sum_{i=r}^{\infty} i^2 \frac{m^i e^{-m}}{i!} = m + m^2 - H_2(r - 1) = m^2 G_{po}(r - 2 \setminus m) + J(r)$$

Distribución Binomial

$$(12.43) \quad H_2(r) = \sum_{i=0}^r i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n(n-1)p^2 F_b(r-2 \setminus n-2; p) + H(r)$$

$$(12.43') \quad J_2(r) = \sum_{i=r}^n i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n(n-1)p^2 G_b(r-2 \setminus n-2; p) + J(r)$$

Distribución de PASCAL

$$(12.44) \quad H_2(n) = \sum_{i=r}^n i^2 \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{r(r+1)}{p^2} F_{pa}(n+2 \setminus r+2; p) - H(n)$$

$$(12.44') \quad J_2(n) = \sum_{i=n}^{\infty} i^2 \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{r(r+1)}{p^2} G_{pa}(n+2 \setminus r+2; p) - J(n)$$

Distribución Hipergeométrica

$$(12.45) \quad H_2(r) = n \frac{R}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} F_h(r-2 \setminus n-2; N-2; R-2) + H(r)$$

$$(12.45') \quad J_2(r) = n \frac{R}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} G_h(r-2 \setminus n-2; N-2; R-2) + J(r)$$

Distribución de PASCAL Hipergeométrica

$$(12.46) \quad H_2(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} \frac{(r+1)(N+2)}{R+2} F_{ph}(n+2 \setminus r+2; N+2; R+2) - H(n)$$

$$(12.46') \quad J_2(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} \frac{(r+1)(N+2)}{R+2} G_{ph}(n+2 \setminus r+2; N+2; R+2) - J(n)$$

4.2. Variable truncada

Dada una variable x , con función de densidad $f(x)$ vimos, en el capítulo anterior, que si eliminamos los valores mayores a X_0 (truncamiento a la izquierda), la densidad de la nueva variable es

$$(12.47) \quad f_y(y) = \frac{f_x(y)}{F_x(X_0)} \quad (y < X_0)$$

Análogamente, si eliminamos los valores menores a X_0 (truncamiento a la derecha), es

$$(12.48) \quad f_y(y) = \frac{f_x(y)}{G_x(X_0)} \quad (y > X_0)$$

Finalmente, para un truncamiento a dos colas, en que se eliminan los valores menores que X_1 y los mayores que X_2 , tenemos

$$(12.49) \quad f_y(y) = \frac{f_x(y)}{F_x(X_2) - F_x(X_1)} \quad (X_1 \leq y \leq X_2)$$

Vimos que para estos tres casos, las medias respectivas son

$$(12.50) \quad \mu_y = E(y) = \frac{1}{F(X_0)} \int_{-\infty}^{X_0} y f_x(y) dy = \frac{H(X_0)}{F(X_0)} \quad (y < X_0)$$

$$(12.51) \quad \mu_y = E(y) = \frac{1}{G(X_0)} \int_{X_0}^{\infty} y f_x(y) dy = \frac{J(X_0)}{G(X_0)} \quad (y > X_0)$$

$$(12.52) \quad \mu_y = E(y) = \frac{1}{F(X_2) - F(X_1)} \int_{X_1}^{X_2} y f_x(y) dy = \frac{H(X_2) - H(X_1)}{F(X_2) - F(X_1)} \quad (X_1 \leq y \leq X_2)$$

La esperanza de y^2 estará dada entonces por

$$(12.53) \quad E(y^2) = \frac{1}{F(X_0)} \int_{-\infty}^{X_0} y^2 f_x(y) dy = \frac{H_2(X_0)}{F(X_0)} \quad (y < X_0)$$

$$(12.54) \quad E(y^2) = \frac{1}{G(X_0)} \int_{X_0}^{\infty} y^2 f_x(y) dy = \frac{J_2(X_0)}{G(X_0)} \quad (y > X_0)$$

$$(12.55) \quad E(y^2) = \frac{1}{F_x(X_2) - F_x(X_1)} \int_{X_1}^{X_2} x^2 f(x) dx = \frac{H_2(X_2) - H_2(X_1)}{F(X_2) - F(X_1)} \quad (X_1 \leq y \leq X_2)$$

Por lo tanto, la varianza para cada uno de estos casos es

$$(12.56) \quad \sigma^2 = \frac{H_2(X_0)}{F(X_0)} - \left[\frac{H(X_0)}{F(X_0)} \right]^2 \quad (y < X_0)$$

$$(12.57) \quad \sigma^2 = \frac{J_2(X_0)}{G(X_0)} - \left[\frac{J(X_0)}{G(X_0)} \right]^2 \quad (y > X_0)$$

$$(12.58) \quad \sigma^2 = \frac{H_2(X_2) - H_2(X_1)}{F(X_2) - F(X_1)} - \left[\frac{H(X_2) - H(X_1)}{F(X_2) - F(X_1)} \right]^2 \quad (X_1 \leq y \leq X_2)$$

Fórmulas similares se tienen para el caso en que la variable original sea discreta.

Ejemplo 14 (Ejemplo 1 del Capítulo 11 –repetido y completado con el cálculo del desvío estándar–). Una empresa constructora ha ganado la licitación estatal para una obra civil por un monto de u\$s 600.000 y un plazo de entrega de 210 días, con una cláusula que penaliza en u\$s 2.500 cada día de atraso, y un premio de u\$s 1.500 por día de adelanto. El costo de la obra para la empresa se ha calculado en u\$s 330.000 fijos más 500 u\$s/día. Además, mediante la teoría de redes se ha determinado que la duración de los trabajos se distribuye Normalmente con media 195 días y desvío estándar 25 días. Calcular la media y el desvío estándar del beneficio.

Podemos expresar el beneficio (B) en función de la duración (x) de la obra como sigue

$$x \leq 210: B = 600.000 - 330.000 - 500x + 1.500(210-x)$$

$$x \geq 210: B = 600.000 - 330.000 - 500x - 2.500(x-210)$$

o sea, operando con las expresiones

$$(12.59) \quad x \leq 210: B = 585.000 - 2.000x$$

$$x \geq 210: B = 795.000 - 3.000x$$

Para simplificar el manejo numérico, vamos a expresar el beneficio en miles de u\$s:

$$(12.59') \quad x \leq 210: B = 585 - 2x$$

$$x \geq 210: B = 795 - 3x$$

$$(12.60) \quad E(B) = 585F(210) - 2H(210) + 795G(210) - 3J(210)$$

También tenemos

$$F(210) = \Phi\left(\frac{210 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{210 - 195}{25}\right) = \Phi(0,6) = 0,72575$$

$$G(210) = 1 - F(210) = 0,27425$$

$$H(210) = \mu F(210) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left(-\frac{0,6^2}{2}\right) = 133,1906$$

$$J(210) = \mu - H(210) = 61,8094$$

Reemplazando en (12.60) obtenemos $E(B) = 190,783$ (Miles de u\$s)

Para el cálculo de la varianza, debemos elevar al cuadrado las expresiones (12.59'):

$$x \leq 210: B^2 = (585 - 2x)^2 = 342.225 - 2.340x + 4x^2$$

$$x \geq 210: B^2 = (795 - 3x)^2 = 632.025 - 4.770x + 9x^2$$

Será entonces

$$E(B^2) = 342.225F(210) - 2.340H(210) + 4H_2(210) + 632.025G(210) - 4.770J(210) + 9J_2(210)$$

Sólo nos falta calcular $H_2(210)$ y $J_2(210)$. Con (12.30)

$$(12.30) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = E(x^2) \Phi(Z) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (x + \mu) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \quad ; \quad Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

calculamos primero $E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2 = 195^2 + 25^2 = 38.650 \text{ días}^2$. Resulta entonces

$$H_2(210) = 24.676,22 ; \quad J_2(210) = E(x^2) - H_2(210) = 13.973,78$$

$$E(B^2) = 39.674,2291 ; \quad D^2(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = 3.276,007$$

$$D(B) = 57,24 \text{ (Miles de u\$s)}$$

Ejemplo 15. (Ejemplo 11 del Capítulo 11 –repetido y completado con el cálculo del desvío estándar–). En la Argentina, en 1992, los hombres tienen una esperanza de vida al nacer de 68,44 años, con un desvío estándar de 10,12 años. Suponiendo que la distribución es de GUMBEL del mínimo, calcular la esperanza de vida de un hombre de 65 años.

La esperanza de vida (total) de un hombre de 65 años es

$$E[x|(x>65)] = \frac{J(65)}{G(65)}$$

Calculemos entonces los parámetros de la distribución

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \beta ; \quad \beta = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma = 7,89 \text{ años}$$

$$\mu = \theta - C\beta ; \quad \theta = \mu + C\beta = 72,99 \text{ años}$$

$$G(65) = \text{Exp} \left[-\text{Exp} \left(\frac{65 - \theta}{\beta} \right) \right] = 0,6955$$

La esperanza matemática parcial derecha, calculada con un programa, es

$$J(65) = 51,2747$$

de donde resulta $E[x|(x>65)] = 73,71927 \cong 73,7$ años, o sea 8,7 años a partir del momento en que tiene 65 años.

Calculemos ahora la varianza mediante la expresión (12.57)

$$(12.57) \quad \sigma^2 = \frac{J_2(X_0)}{G(X_0)} - \left[\frac{J(X_0)}{G(X_0)} \right]^2 \quad (y > X_0)$$

Mediante un programa personal, hemos calculado

$$J_2(X_0) = 3.798,023$$

de donde resulta

$$\sigma^2 = \frac{3.798,023}{0,69554} - 73,71927^2 = 26,0078$$

$$\sigma = 5,1 \text{ años}$$

Este es el desvío estándar para una expectativa de vida de 73,7 años y también para el tiempo de vida restante a partir de los 65 años, o sea de 8,7 años, pues $x = 65$ años es un valor prefijado.

Ejemplo 16 (Ejemplo 7 –repetido y completado con el cálculo del desvío estándar–).

Una fábrica de autopartes tiene en cartera un pedido de 210 piezas fundidas. El porcentaje defectuoso es del 11% y por razones técnicas se deben fundir todas las piezas en una sola colada. En el contrato firmado con el cliente se estipula un precio de venta de \$122 por cada pieza hasta las 210 y \$90 por cada pieza excedente. Se establece además que el proveedor otorgará una bonificación de \$20 por cada pieza faltante hasta las 210. Cada pieza producida tiene un costo de \$92 –sea buena o defectuosa–. a) Si se decide fabricar 250 piezas, ¿cuál es la media y el desvío estándar del beneficio? b) Ídem si se decide fabricar 239 piezas (lote óptimo).

a) Vimos que el beneficio B del lote se expresa en función del número r de piezas buenas obtenidas como sigue

$$r \leq 210 : B = 122r - 92 \times 250 - 20(210 - r) = 142r - 27.200$$

$$r \geq 211 : B = 122 \times 210 - 92 \times 250 + 90(r - 210) = 90r - 16.280$$

Su valor esperado

$$(12.16) \quad E(B) = 142H(210) - 27.200F(210) + 90J(211) - 16.280G(211)$$

La variable r tiene distribución Binomial de $n = 250$ y $p = 0,89$. Entonces

$$F(210) = F_b(210 \setminus 250; 0,89) = 0,010196$$

$$G(211) = 1 - F(210) = 0,989804$$

$$H(210) = npF_b(r-1 \setminus n-1; p) = 250 \times 0,89F_b(209 \setminus 249; 0,89) = 222,5 \times 0,009558 = 2,12661$$

$$J(211) = np - H(210) = 220,3734$$

Reemplazando en (12.16), obtenemos $E(B) = \$3.744,24$.

Para el cálculo de la varianza, tenemos

$$r \leq 210 : B^2 = (142r - 27.200)^2 = 20.164r^2 - 7.724.800r + 7,3984 \times 10^8$$

$$r \geq 211 : B^2 = (90r - 16.280)^2 = 8.100r^2 - 2.930.400r + 265.038.400$$

Será entonces

$$(12.61) \quad E(B^2) = 20.164H_2(210) - 7.724.800H(210) + 7,3984 \times 10^8 F(210) + 8.100J_2(211) - 2.930.400J(211) + 265.038.400G(211)$$

Nos falta calcular $H_2(210)$ mediante (12.43):

$$(12.43) \quad H_2(r \setminus n; p) = n(n-1)p^2 F_b(r-2 \setminus n-2; p) + H_b(r \setminus n; p)$$

$$H_2(210 \setminus 250; 0,89) = 250 \times 249 \times 0,89^2 F_b(208 \setminus 248; 0,89) + H_b(210 \setminus 250; 0,89)$$

$$F_b(208 \setminus 248; 0,89) = 0,008953$$

$$H_2(210 \setminus 250; 0,89) = 250 \times 249 \times 0,89^2 \times 0,008953 + 2,12661 = 443,5753$$

$$J_2(211) = E(\mathbf{r}^2) - H_2(210) = (250 \times 0,89)^2 + 250 \times 0,89 \times 0,11 - 443,5753 = 49.087,1497$$

Reemplazando en (12.61) se obtiene $E(\mathbf{B}^2) = 14.219.918,94$, por lo tanto

$$D^2(\mathbf{B}) = E(\mathbf{B}^2) - [E(\mathbf{B})]^2 = 200.575,88 ; \quad D(\mathbf{B}) = 447,86$$

b) Generalizando para n , la expresión del beneficio es

$$r \leq 210 : \quad B = 122r - 92n - 20(210 - r) = 142r - 92n - 4.200$$

$$r \geq 211 : \quad B = 122 \times 210 - 92n + 90(r - 210) = 90r - 92n + 6.720$$

Para $n = 239$, es

$$(12.62) \quad r \leq 210 : \quad B = 142r - 26.188$$

$$r \geq 211 : \quad B = 90r - 15.268$$

$$E(\mathbf{B}) = 142H(210) - 26.188F(210) + 90J(211) - 15.268G(211)$$

Ahora tenemos

$$F(210) = F_b(210 \setminus 239; 0,89) = 0,31633$$

$$G(211) = 1 - F_b(210 \setminus 239; 0,89) = 0,68367$$

$$H(210) = H_b(210 \setminus 239; 0,89) = 239 \times 0,89 F_b(209 \setminus 238; 0,89) = 239 \times 0,89 \times 0,30812 = 65,5402$$

$$J(211) = J_b(211 \setminus 239; 0,89) = 239 \times 0,89 - H_b(210 \setminus 239; 0,89) = 147,1698$$

Resulta entonces $E(\mathbf{B}) = \$3.829,67$.

Para el cálculo de la varianza del beneficio, elevamos al cuadrado las expresiones (12.62):

$$r \leq 210 : \quad B^2 = (142r - 26.188)^2 = 20.164r^2 - 7.437.392r + 685.811.344$$

$$r \geq 211 : \quad B^2 = (90r - 15.268)^2 = 8.100r^2 - 2.748.240r + 233.111.824$$

$$E(\mathbf{B}^2) = 20.164H_2(210) - 7.437.392H(210) + 685.811.344F(210) + 8.100J_2(211) - 2.748.240J(211) + 233.111.824G(211)$$

Falta calcular

$$H_2(210) = H_2(210 \setminus 239; 0,89) = 239 \times 238 \times 0,89^2 F_b(208 \setminus 237; 0,89) + H_b(210 \setminus 250; 0,89) = 13.581,5467$$

$$J_2(211) = E(\mathbf{r}^2) - H_2(210) = (239 \times 0,89)^2 + 239 \times 0,89 \times 0,11 - 13.581,5467 = 31.687,3956$$

con lo que resulta $E(\mathbf{B}^2) = 14.934.225,23 ; \quad D^2(\mathbf{B}) = 267.847,30 ; \quad D(\mathbf{B}) = 517,54$

Veamos ahora como cambian estos resultados para distintos valores de la probabilidad de pieza buena que, en el ejemplo, era 0,89.

P	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
n óptimo	263	249	237	225	215
$E(\mathbf{B} \setminus n \text{ óptimo})$	1.335,67	2781,12	4.078,29	5.245,36	6.094,92
$D(\mathbf{B} \setminus n \text{ óptimo})$	755,23	630,58	481,91	322,62	136,67
$E(\mathbf{B} \setminus n=250)$	1.193,06	2.780,86	3.969,88	5.095,00	5.995,00
$D(\mathbf{B} \setminus n=250)$	882,95	615,11	427,40	310,14	141,59

Ejemplo 17 (Ejemplo 12 –repetido y completado con el cálculo del desvío estándar–).

Un fabricante entrega su producto en cajas de 50 unidades, en las cuales siempre coloca “honestamente” 3 defectuosas. Sabe que las otras 47 son todas buenas. El comprador toma una muestra de 5 unidades de la caja y, si son todas buenas, la acepta; si encuentra 2 o más defectuosas, la rechaza, pero si encuentra 1 defectuosa, sigue revisando hasta encontrar otra defectuosa –que seguramente encontrará–. La revisión tiene un costo de 20\$/unidad buena y 30\$/unidad defectuosa. Calcular la media y el desvío estándar del costo de muestreo por caja.

Sea r el número de defectuosas que encuentra en la primera muestra de 5 unidades

$$(12.63) \quad r = 0: \quad C = 20 \times 5 = 100$$

$$r = 1: \quad C = 20 \times 4 + 30 + 20(n_1 - 1) + 30 = 120 + 20n_1 \quad (n_1 \geq 1 \text{ para encontrar } r_1 = 1 \text{ defectuosa en } N_1 = 45 \text{ donde hay } R_1 = 2 \text{ defectuosas})$$

$$n_2 \leq 5 \text{ para } r_2 = 2 \text{ defectuosas: } C = 30 \times 2 + 20(n_2 - 2) = 20 + 20n_2$$

El costo esperado será:

$$(12.64) \quad E(C) = 100P_h(0 \setminus 5; 50; 3) + 120P_h(1 \setminus 5; 50; 3) + 20J_{ph}(1 \setminus r_1 = 1; N_1 = 45; R_1 = 2) + \\ + 20F_{ph}(5 \setminus r_2 = 2; N_2 = 50; R_2 = 3) + 20H_{ph}(5 \setminus r_2 = 2; N_2 = 50; R_2 = 3)$$

Calculemos los términos de esta expresión

$$P_h(0 \setminus 5; 50; 3) = 0,72398$$

$$P_h(1 \setminus 5; 50; 3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{50-3}{5-1}}{\binom{50}{5}} = 0,252551$$

$$J_{ph}(1 \setminus r_1 = 1; N_1 = 45; R_1 = 2) = \frac{r_1(N_1 + 1)}{R_1 + 1} G_{ph}(2 \setminus r = 2; N = 46; R = 3)$$

La última G_{ph} vale obviamente la unidad, por lo tanto

$$J_{ph}(1 \setminus r_1 = 1; N_1 = 45; R_1 = 2) = \frac{r_1(N_1 + 1)}{R_1 + 1} = \frac{1 \times 46}{3} = 15,33333$$

$$F_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3) = G_h(2 \setminus n=5; N=50; R=3) = 1 - F_h(1 \setminus n=5; N=50; R=3)$$

$$= 1 - P_h(0 \setminus 5; 50; 3) - P_h(1 \setminus 5; 50; 3) = 0,023469$$

$$H_{ph}(5 \setminus r=2; N=50; R=3) = \frac{r(N+1)}{R+1} F_{ph}(n+1 \setminus r+1; N+1; R+1)$$

$$= \frac{2 \times 51}{4} F_{ph}(6 \setminus 3; 51; 4) = 25,5 G_h(3 \setminus n=6; N=51; R=4)$$

$$= 25,5 [P_h(3 \setminus n=6; N=51; R=4) + P_h(4 \setminus n=6; N=51; R=4)]$$

$$= 25,5 \left[\frac{\binom{4}{3} \binom{51-4}{6-3}}{\binom{51}{6}} + \frac{\binom{4}{4} \binom{51-4}{6-4}}{\binom{51}{6}} \right]$$

$$= 25,5 (0,00360144 + 0,000060024) = 0,093367$$

Reemplazando en (12.64), obtenemos $E(C) = \$411,71$

Para el cálculo de la varianza, elevamos al cuadrado las expresiones (12.63):

$$r = 0: C^2 = 100^2 = 10.000$$

$$r = 1: C^2 = (120 + 20n_1)^2 = 14.400 + 4.800n_1 + 400n_1^2 \quad (n_1 \geq 1 \text{ para encontrar 1 defectuosa en } N=45 \text{ donde hay } R=2 \text{ defectuosas})$$

$$n_2 \leq 5 \text{ para } r=2 \text{ defectuosas: } C^2 = (20 + 20n_2)^2 = 400 + 800n_2 + 400n_2^2$$

Será entonces

$$(12.65) \quad E(C^2) = 10.000 P_h(0 \setminus 5; 50; 3) + 14.400 P_h(1 \setminus 5; 50; 3) + \\ + 4.800 J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) + 400 J_2(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) + \\ + 400 F_{ph}(5 \setminus r_2=2; N_2=50; R_2=3) + 800 H_{ph}(5 \setminus r_2=2; N_2=50; R_2=3) + \\ + 400 H_2(5 \setminus r_2=2; N_2=50; R_2=3)$$

Falta calcular la $J_2(1)$ y $H_2(5)$:

$$J_2(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) = \frac{r_1(N_1+1)}{R_1+1} \frac{(r_1+1)(N_1+2)}{R_1+2} G_{ph}(3 \setminus r=3; N=47; R=4) - \\ - J_{ph}(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2)$$

La última G_{ph} vale obviamente la unidad, y ya calculamos la $J_{ph}(1)$, entonces

$$J_2(1 \setminus r_1=1; N_1=45; R_1=2) = \left(\frac{1 \times 46}{3} \right) \left(\frac{2 \times 47}{4} \right) - \frac{1 \times 46}{3} = 345$$

$$H_2(n_2=5 \setminus r_2=2; N_2=50; R_2=3) =$$

$$= \frac{r_2(N_2+1)}{R_2+1} \frac{(r_2+1)(N_2+2)}{R_2+2} F_{ph}(n_2+2 \setminus r_2+2 : N_2+2; R_2+2) - H(n=5)$$

Vimos que $H(n=5) = 0,093367$. Además

$$F_{ph}(n_2+2 \setminus r_2+2; N_2+2; R_2+2) = F_{ph}(7 \setminus r=4; N=52; R=5) = G_h(4 \setminus n=7; N=52; R=5) =$$

$$= P_h(4 \setminus n=7; N=52; R=5) + P_h(5 \setminus n=7; N=52; R=5)$$

$$= \frac{\binom{5}{4} \binom{52-5}{7-4}}{\binom{52}{7}} + \frac{\binom{5}{5} \binom{52-5}{7-5}}{\binom{52}{7}} = 0,000606011 + 0,00000808 = 0,000614091$$

$$H_2(n_2=5 \setminus r_2=2; N_2=50; R_2=3) = 0,395204$$

Reemplazando en (12.65), obtenemos $E(C^2) = 222.718,6938$;
 $D^2(C) = 53.215,6423$; $D(C) = 230,69$.

5. APÉNDICE

5.1. DEMOSTRACIONES DE LAS EXPRESIONES DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA PARCIAL DE X^2

5.1.1. Distribución Normal [Expresión (12.30)]

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

es

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x x^2 \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

Ponemos $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ entonces $x = \mu + \sigma Z$; $dx = \sigma dZ$

$$H_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z (\mu + \sigma Z)^2 \text{Exp} \left(-\frac{Z^2}{2} \right) dZ =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z (\mu^2 + 2\mu\sigma Z + \sigma^2 Z^2) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ = \\
&= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z Z \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z Z^2 \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ
\end{aligned}$$

En esta expresión, la primera integral, dividida por $\sqrt{2\pi}$ es $\Phi(Z)$; la segunda es elemental y vale

$$\int_{-\infty}^Z Z \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ = -\text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right)$$

La última es algo más complicada y la llamaremos $I(Z)$. Tenemos entonces

$$(12.66) \quad H_2(x) = \mu^2 \Phi(Z) - \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} I(Z)$$

siendo

$$(12.67) \quad I(Z) = \int_{-\infty}^Z Z^2 \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ$$

Vamos a calcularla a partir de

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^Z \text{Exp}(-\alpha Z^2) dZ$$

En esta ponemos $\alpha Z^2 = \frac{t^2}{2}$; $t = Z\sqrt{2\alpha}$; $dZ = \frac{dt}{\sqrt{2\alpha}}$ y queda

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^{Z\sqrt{2\alpha}} \text{Exp}\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{2\pi} \Phi(Z\sqrt{2\alpha}) \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Phi(Z\sqrt{2\alpha})$$

o sea

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^Z \text{Exp}(-\alpha Z^2) dZ = \sqrt{\pi} \alpha^{-1/2} \Phi(Z\sqrt{2\alpha})$$

Derivamos respecto de α

$$\frac{dK(\alpha)}{d\alpha} = - \int_{-\infty}^Z Z^2 \text{Exp}(-\alpha Z^2) dZ = \sqrt{\pi} \left[-\frac{\alpha^{-3/2}}{2} \Phi(Z\sqrt{2\alpha}) + \alpha^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}(-\alpha Z^2) Z \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha^{-1/2} \right]$$

o sea

$$\int_{-\infty}^Z Z^2 \text{Exp}(-\alpha Z^2) dZ = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} \Phi(Z\sqrt{2\alpha}) - \frac{Z}{2\alpha} \text{Exp}(-\alpha Z^2)$$

Para $\alpha=1/2$ se obtiene la integral $I(Z)$, esto es

$$I(Z) = \int_{-\infty}^Z Z^2 \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ = \sqrt{2\pi} \Phi(Z) - Z \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right)$$

Reemplazando en

$$(12.66) \quad H_2(x) = \mu^2 \Phi(Z) - \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} I(Z)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} H_2(x) &= \mu^2 \Phi(Z) - \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{2\pi} \Phi(Z) - Z \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \right] \\ &= (\mu^2 + \sigma^2) \Phi(Z) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (2\mu + \sigma Z) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \end{aligned}$$

y dado que $x = \mu + \sigma Z$, resulta finalmente la expresión (12.30)

$$(12.30) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = E(x^2) \Phi(Z) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (x + \mu) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \quad ; \quad Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

5.1.2. Distribución Lognormal [Expresión (12.31)]

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{xD\sqrt{2\pi}} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{D}\right)^2\right]$$

es

$$H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_0^x x \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{D}\right)^2\right] dx$$

Ponemos $Z = \frac{\ln x - m}{D}$ entonces $x = \text{Exp}(m + DZ)$; $dx = D \text{Exp}(m + DZ) dZ$

$$\begin{aligned} H_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \text{Exp}(m + DZ) \text{Exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) \text{Exp}(m + DZ) dZ = \\ &= \frac{e^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \text{Exp}\left(2DZ - \frac{Z^2}{2}\right) dZ \end{aligned}$$

Completamos el cuadrado en la última integral

$$2DZ - \frac{Z^2}{2} = 2D^2 - \frac{1}{2}(Z - 2D)^2$$

y queda

$$H_2(x) = \frac{\text{Exp}(2m + 2D^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}(Z - 2D)^2\right] dZ$$

Ponemos finalmente $t = Z - 2D$

$$H_2(x) = \frac{\text{Exp}(2m + 2D^2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \text{Exp}\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \text{Exp}(2m + 2D^2) \Phi(t)$$

y como $E(x^2) = \text{Exp}(2m + 2D^2)$ resulta la expresión (12.31):

$$(12.31) \quad H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = E(x^2) \Phi\left(\frac{\ln x - m}{D} - 2D\right)$$

5.1.3. Distribución Gamma [Expresión (12.32)]

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(r)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{r-1} e^{-x/\beta}$$

es

$$H_2(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(r)} \int_0^x x^2 \left(\frac{x}{\beta}\right)^{r-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^2}{\beta \frac{\Gamma(r+2)}{r(r+1)}} \int_0^x \left(\frac{x}{\beta}\right)^{r+1} e^{-x/\beta} dx =$$

$$r(r+1)\beta^2 \left[\frac{1}{\beta \Gamma(r+2)} \int_0^x \left(\frac{x}{\beta}\right)^{r+1} e^{-x/\beta} dx \right]$$

Ahora $r(r+1)\beta^2 = E(x^2)$ y la expresión entre corchetes es la $F_g(x; r+2; \beta)$; resulta entonces la fórmula

$$(12.32) \quad H_2(x) = \int_0^x x f(x) dx = E(x^2) F_g(x; r+2; \beta)$$

5.1.4. Distribución de WEIBULL [Expresión (12.33)]

Dado que

$$f(x) = \frac{\omega x^{\omega-1}}{\beta^\omega} \text{Exp}\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\omega\right]$$

es

$$H_2(x) = \frac{\omega}{\beta^\omega} \int_0^x x^2 x^{\omega-1} \text{Exp}\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\omega\right] dx = \frac{\omega}{\beta^\omega} \int_0^x x^{\omega+1} \text{Exp}\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\omega\right] dx$$

Ponemos en la integral

$$y = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\omega}; \quad x = \beta y^{1/\omega}; \quad dx = \frac{\beta}{\omega} y^{1/\omega-1} dy$$

y queda

$$H_2(x) = \omega \int_0^y y \beta y^{1/\omega} e^{-y} \frac{\beta}{\omega} y^{1/\omega-1} dy = \beta^2 \int_0^y y^{2/\omega} e^{-y} dy = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\omega}\right) \left[\frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\omega}\right)} \int_0^y y^{2/\omega} e^{-y} dy \right]$$

Ahora $\beta^2 \Gamma(1+2/\omega) = E(x^2)$ y la expresión entre corchetes es la $F_g(y \mid r=1+2/\omega; \beta'=1)$. Resulta entonces la expresión (12.33)

$$(12.33) \quad H_2(x) = \int_0^x x^2 f(x) dx = E(x^2) F_g\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\omega} \mid r=1 + \frac{2}{\omega}; \beta'=1\right]$$

5.1.5. Distribución de PARETO [Expresión (12.34)]

Dado que

$$f(x) = \frac{\psi \theta^{\psi}}{x^{\psi+1}}$$

es

$$H_2(x) = \int_{\theta}^x x^2 \frac{\psi \theta^{\psi}}{x^{\psi+1}} dx = \psi \theta^{\psi} \int_{\theta}^x x^{-\psi+1} dx = \frac{\psi \theta^{\psi}}{-\psi+2} x^{-\psi+2} \Big|_{\theta}^x = \frac{\psi \theta^{\psi}}{-\psi+2} (x^{-\psi+2} - \theta^{-\psi+2})$$

$$\frac{\psi \theta^2}{\psi-2} (\theta^{-\psi+2} - x^{-\psi+2})$$

o sea finalmente

$$(12.34) \quad H_2(x) = \int_{\theta}^x x f(x) dx = \frac{\psi \theta^2}{\psi-2} \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\psi-2} \right]$$

5.1.6. Distribución de GUMBEL del mínimo [Expresión (12.35)]

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right) \text{Exp}\left[-\text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)\right]$$

es

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^x x^2 \text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right) \text{Exp}\left[-\text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)\right] dx$$

Llamamos $t = \text{Exp}\left(\frac{x - \theta}{\beta}\right)$; $x = \theta + \beta \text{Ln } t$; $dx = \beta \frac{dt}{t}$

y queda

$$H_2(x) = \frac{1}{\beta} \int_0^t (\theta + \beta \text{Ln } t)^2 t e^{-t} \beta \frac{dt}{t} = \theta^2 \int_0^t e^{-t} dt + 2\theta\beta \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t dt + \beta^2 \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t dt$$

En el último miembro, la primera integral es elemental y vale $1 - e^{-t}$; la segunda integral, que llamaremos $I_1(t)$ no es elemental y vimos en el capítulo anterior que su expresión, dada por un desarrollo en serie es

$$(12.36) \quad I_1(t) = \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t dt = (1 - e^{-t}) \text{Ln } t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!n}$$

Ahora obtendremos el desarrollo en serie de la última integral

$$I_2(t) = \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t dt$$

Podemos poner

$$e^{-t} \text{Ln}^2 t = \text{Ln}^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

La primitiva de $t^n \text{Ln}^2 t$ es

$$\int t^n \text{Ln}^2 t dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{Ln}^2 t - \frac{2t^{n+1}}{(n+1)^2} \text{Ln } t + \frac{2t^{n+1}}{(n+1)^3}$$

Vemos que se anula en $t = 0$, por lo tanto, la integral definida entre 0 y t toma la misma expresión. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^t t^n \text{Ln}^2 t dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \text{Ln}^2 t - \frac{2t^{n+1}}{(n+1)^2} \text{Ln } t + \frac{2t^{n+1}}{(n+1)^3} \right] = \\ &= \text{Ln}^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+1}}{n+1} - 2 \text{Ln } t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)^3} \\ &= \text{Ln}^2 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)!} - 2 \text{Ln } t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^2} \end{aligned}$$

La primera serie es el desarrollo de $1 - e^{-t}$ y las otras se pueden comenzar con $n=1$, obteniéndose la expresión (12.37)

$$(12.37) \quad \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt = (1 - e^{-t}) \text{Ln}^2 t + 2 \text{Ln} t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n! n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n! n^2}$$

5.1.7. Distribución de GUMBEL del máximo [Expresión (12.39)]

Dado que

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \text{Exp}\left(-\frac{x-\theta}{\beta}\right) \text{Exp}\left[-\text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)\right]$$

es

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^x x^2 \text{Exp}\left(-\frac{x-\theta}{\beta}\right) \text{Exp}\left[-\text{Exp}\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)\right] dx$$

$$\text{Llamamos } t = \text{Exp}\left(-\frac{x-\theta}{\beta}\right); \quad x = \theta - \beta \text{Ln } t; \quad dx = -\beta \frac{dt}{t}$$

y queda

$$(12.67) \quad H_2(x) = \frac{1}{\beta} \int_{\infty}^t (\theta - \beta \text{Ln } t)^2 t e^{-t} \left(-\frac{\beta}{t}\right) dt = \theta^2 \int_t^{\infty} e^{-t} dt - 2\theta\beta \int_t^{\infty} e^{-t} \text{Ln } t \, dt + \beta^2 \int_t^{\infty} e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt$$

En el último miembro, la primera integral es elemental y vale e^{-t} . Las otras pueden expresarse en función de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ que utilizamos para la GUMBEL del mínimo ya que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \text{Ln } t \, dt = -C; \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt = \frac{\pi^2}{6} + C^2$$

es

$$\int_t^{\infty} e^{-t} \text{Ln } t \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \text{Ln } t \, dt - \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t \, dt = -C - I_1(t)$$

$$\int_t^{\infty} e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt - \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt = \frac{\pi^2}{6} + C^2 - I_2(t)$$

Reemplazando en (12.67), obtenemos la expresión final (12.39):

$$(12.39) \quad H_2(x) = \int_{-\infty}^x x^2 f(x) dx = \theta^2 e^{-t} + 2\beta\theta \left(C + \int_0^t e^{-t} \text{Ln } t \, dt \right) + \beta^2 \left(C^2 + \frac{\pi^2}{6} - \int_0^t e^{-t} \text{Ln}^2 t \, dt \right)$$

5.2. DEMOSTRACIONES DE LAS EXPRESIONES DE $H(r)$ Y $H_2(r)$ PARA LAS DISTRIBUCIONES DISCRETAS

5.2.1. Distribución de Poisson [expresiones (12.2) y (12.42)]

Dado que

$$P(r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

es

$$(12.2) \quad H(r) = \sum_{i=0}^r i P(i) = \sum_{i=0}^r i \frac{e^{-m} m^i}{i!} = m \sum_{i=1}^r \frac{e^{-m} m^{i-1}}{(i-1)!} = m \sum_{i=0}^{r-1} \frac{e^{-m} m^i}{i!} = m F_{po}(r-1 \setminus m)$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} H_2(r) &= \sum_{i=0}^r i^2 P(i) = \sum_{i=0}^r i^2 \frac{e^{-m} m^i}{i!} = m \sum_{i=1}^r i \frac{e^{-m} m^{i-1}}{(i-1)!} = m \sum_{i=1}^r (i-1+1) \frac{e^{-m} m^{i-1}}{(i-1)!} = \\ &= m \sum_{i=1}^r (i-1) \frac{e^{-m} m^{i-1}}{(i-1)!} + m \sum_{i=1}^r \frac{e^{-m} m^{i-1}}{(i-1)!} = m^2 \sum_{i=2}^r \frac{e^{-m} m^{i-2}}{(i-2)!} + m \sum_{i=0}^{r-1} \frac{e^{-m} m^i}{i!} = \\ &= m^2 \sum_{i=0}^{r-2} \frac{e^{-m} m^i}{i!} + H(r) \end{aligned}$$

o sea finalmente

$$(12.42) \quad H_2(r) = m^2 F_{po}(r-2 \setminus m) + H(r)$$

5.2.2. Distribución Binomial [expresiones (12.13) y (12.43)]

Dado que

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

es

$$\begin{aligned} (12.68) \quad H(r) &= \sum_{i=0}^r i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\ &= np \sum_{i=1}^r \frac{(n-1)!}{(i-1)![(n-1)-(i-1)]!} p^{i-1} (1-p)^{(n-1)-(i-1)} \end{aligned}$$

Ponemos $i' = i-1$; $n' = n-1$; $r' = r-1$ entonces queda

$$H(r) = np \sum_{i'=0}^{r'} \frac{n!}{i'!(n-i')!} p^{i'} (1-p)^{n-i'} = np F_b(r' \setminus n'; p)$$

o sea finalmente

$$(12.13) \quad H(r) = np F_b(r-1 \setminus n-1; p)$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} H_2(r) &= \sum_{i=0}^r i^2 \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^r i \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^r (i-1+1) \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^r (i-1) \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

De (12.68) vemos que la última suma es $H(r)$. La primera suma del último miembro, que llamaremos $A(r)$ es

$$A(r) = \sum_{i=1}^r (i-1) \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^r \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} p^{i-2} (1-p)^{n-i}$$

Ponemos $i''=i-2$; $n''=n-2$; $r''=r-2$ entonces queda

$$A(r) = n(n-1)p^2 \sum_{i''=0}^{r''} \frac{n''!}{i''!(n''-i'')!} p^{i''} (1-p)^{n''-i''} = n(n-1)p^2 F_b(r'' \setminus n''; p)$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.43) \quad H_2(r \setminus n; p) = n(n-1)p^2 F_b(r-2 \setminus n-2; p) + H_b(r \setminus n; p)$$

5.2.3. Distribución de PASCAL [expresiones (12.14) y (12.44)]

Dado que

$$P(n) = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

es

$$\begin{aligned} (12.69) \quad H(n) &= \sum_{i=r}^n i \frac{(i-1)!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=r}^n \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \\ &= \frac{r}{p} \sum_{i=r}^n \frac{i!}{r!(i-r)!} p^{r+1} (1-p)^{i-r} \end{aligned}$$

Ponemos $i^*=i+1$; $n^*=n+1$; $r^*=r+1$ entonces queda

$$H(n) = \frac{r}{p} \sum_{i'=r'}^{n'} \frac{(i'-1)!}{(r'-1)!(i'-r')!} p^{r'} (1-p)^{i'-r'} = \frac{r}{p} F_{pa}(n' \setminus r'; p)$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.14) \quad H_{pa}(n \setminus r; p) = \frac{r}{p} F_{pa}(n+1 \setminus r+1; p)$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} H_2(n) &= \sum_{i=r}^n i^2 \frac{(i-1)!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=r}^n i \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \\ &= \sum_{i=r}^n (i+1-1) \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \\ &= \sum_{i=r}^n (i+1) \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} - \sum_{i=r}^n \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} \end{aligned}$$

De (12.69) vemos que la última suma es $H(n)$. La primera suma del último miembro, que llamaremos $A(n)$, es

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{i=r}^n (i+1) \frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=r}^n \frac{(i+1)!}{(r-1)!(i-r)!} p^r (1-p)^{i-r} = \\ &= \frac{r(r+1)}{p^2} \sum_{i=r}^n \frac{(i+1)!}{(r+1)!(i-r)!} p^{r+2} (1-p)^{i-r} \end{aligned}$$

Ponemos $i'' = i+2$; $n'' = n+2$; $r'' = r+2$ entonces queda

$$A(n) = \frac{r(r+1)}{p^2} \sum_{i''=r''}^{n''} \frac{(i''-1)!}{(r''-1)!(i''-r'')!} p^{r''} (1-p)^{i''-r''} = \frac{r(r+1)}{p^2} F_{pa}(n'' \setminus r''; p)$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.44) \quad H_2(n) = \sum_{i=r}^n i^2 \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{r(r+1)}{p^2} F_{pa}(n+2 \setminus r+2; p) - H(n)$$

5.2.4. Distribución Hipergeométrica [expresiones (12.19) y (12.45)]

Dado que

$$P(r) = \frac{\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

es

$$\begin{aligned} (12.70) \quad H(r) &= \sum_{i=0}^r i \frac{\binom{R}{i} \binom{N-R}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \sum_{i=0}^r i \frac{\frac{R!}{i!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)!(N-R-(n-i))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)!(N-R-(n-i))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{nR}{N} \sum_{i=1}^r \frac{\frac{(R-1)!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)!(N-R-(n-i))!}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}} = \end{aligned}$$

Ponemos $i' = i-1$; $r' = r-1$; $n' = n-1$; $R' = R-1$; $N' = N-1$ entonces queda

$$H(r) = \frac{nR}{N} \sum_{i'=0}^{r'} \frac{\binom{R'}{i'} \binom{N'-R'}{n'-i'}}{\binom{N'}{n'}} = \frac{nR}{N} F_h(r' \setminus n'; N'; R')$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.19) \quad H(r) = \frac{nR}{N} F_h(r-1 \setminus n-1; N-1; R-1)$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} H_2(r) &= \sum_{i=0}^r i^2 \frac{\binom{R}{i} \binom{N-R}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \sum_{i=0}^r i^2 \frac{\frac{R!}{i!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)!(N-R-(n-i))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \\ &= \sum_{i=1}^r i \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)!(N-R-(n-i))!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^r (i-1+1) \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \\
&= \sum_{i=1}^r (i-1) \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} + \sum_{i=1}^r \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}
\end{aligned}$$

De (12.70) vemos que la última suma es $H(r)$. La primera suma del último miembro, que llamaremos $A(r)$, es

$$\begin{aligned}
A(r) &= \sum_{i=1}^r (i-1) \frac{\frac{R!}{(i-1)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \\
&= \sum_{i=2}^r \frac{\frac{R!}{(i-2)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \\
&= \frac{nR}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{(N-1)} \sum_{i=2}^r \frac{\frac{(R-2)!}{(i-2)!(R-i)!} \frac{(N-R)!}{(n-i)![(N-R)-(n-i)]!}}{\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}}
\end{aligned}$$

Ponemos $i'' = i-2$; $r'' = r-2$; $n'' = n-2$; $R'' = R-2$; $N'' = N-2$ entonces queda

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{nR}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} \sum_{i''=0}^{r''} \frac{\frac{R''!}{i''!(R''-i'')!} \frac{(N''-R'')!}{(n''-i'')![(N''-R'')-(n''-i'')]}{\frac{N''!}{n''!(N''-n'')!}} = \\
&= \frac{nR}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} F_h(r'' \setminus n''; N''; R'') = \frac{nR}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} F_h(r-2 \setminus n-2; N-2; R-2)
\end{aligned}$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.45) \quad H_2(r) = n \frac{R}{N} \frac{(n-1)(R-1)}{N-1} F_h(r-2 \setminus n-2; N-2; R-2) + H(r)$$

5.2.5. Distribución de PASCAL Hipergeométrica [expresiones (12.20) y (12.46)]

Dado que

$$P(n) = \frac{\binom{n-1}{r-1} \binom{N-n}{R-r}}{\binom{N}{R}}$$

es

$$\begin{aligned} (12.71) \quad H(n) &= \sum_{i=r}^n i \frac{\binom{i-1}{r-1} \binom{N-i}{R-r}}{\binom{N}{R}} = \sum_{i=r}^r i \frac{\frac{(i-1)!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} = \\ &= \sum_{i=r}^n \frac{\frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} = \frac{r(N+1)}{R+1} \sum_{i=r}^n \frac{\frac{i!}{r!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{(N+1)!}{(R+1)!(N-R)!}} \end{aligned}$$

Ponemos $i' = i+1$; $r' = r+1$; $n' = n+1$; $R' = R+1$; $N' = N+1$ entonces queda

$$H(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} \sum_{i'=r'}^{n'} \frac{\frac{(i'-1)!}{(r'-1)!(i'-r')!} \frac{(N'-i')!}{(R'-r')![(N'-i')-(R'-r')]!}}{\frac{N'!}{R'!(N'-R')!}} = \frac{r(N+1)}{R+1} F_{ph}(n \setminus r', N', R')$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.20) \quad H(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} F_{ph}(n+1 \setminus r+1; N+1; R+1)$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} H_2(n) &= \sum_{i=r}^n i^2 \frac{\binom{i-1}{r-1} \binom{N-i}{R-r}}{\binom{N}{R}} = \sum_{i=r}^r i^2 \frac{\frac{(i-1)!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} = \\ &= \sum_{i=r}^n i \frac{\frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} = \sum_{i=r}^n (i+1-1) \frac{\frac{i!}{r!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=r}^n (i+1) \frac{\frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} - \sum_{i=r}^n \frac{\frac{i!}{r!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}}$$

Según (12.71), la última suma es $H(n)$. La primera suma, que llamaremos $A(n)$ es

$$A(n) = \sum_{i=r}^n (i+1) \frac{\frac{i!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} =$$

$$= \sum_{i=r}^n \frac{\frac{(i+1)!}{(r-1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{N!}{R!(N-R)!}} =$$

$$= \frac{r(r+1)(N+1)(N+2)}{(R+1)(R+2)} \sum_{i=r}^n \frac{\frac{(i+1)!}{(r+1)!(i-r)!} \frac{(N-i)!}{(R-r)![(N-i)-(R-r)]!}}{\frac{(N+2)!}{(R+2)!(N-R)!}}$$

Ponemos $i'' = i+2$; $r'' = r+2$; $n'' = n+2$; $R'' = R+2$; $N'' = N+2$ entonces queda

$$H_2(n) = \frac{r(r+1)(N+1)(N+2)}{(R+1)(R+2)} \sum_{i''=r''}^{n''} \frac{\frac{(i''-1)!}{(r''-1)!(i''-r'')!} \frac{(N''-i'')!}{(R''-r'')![(N''-i'')-(R''-r'')]} \frac{N''!}{R''!(N''-R'')!}}{N''!} - H(n)$$

o sea finalmente, la expresión

$$(12.46) \quad H_2(n) = \frac{r(N+1)}{R+1} \frac{(r+1)(N+2)}{R+2} F_{ph}(n+2 \setminus r+2; N+2; R+2) - H(n)$$

6. PROBLEMAS

12.1) Hay unos rollos de tela cuyo proceso de fabricación genera en promedio 1 falla cada 100 metros. La longitud de cada rollo es variable, pues se corta en la segunda falla si ésta aparece antes de los 200 m, de lo contrario se corta en 200 m. a) Calcular la longitud media de los rollos. b) Calcular el beneficio esperado por rollo si el costo es de 5 \$/m. y el precio de venta 8 \$/m. para los rollos menores de 150 m y 10 \$/m. para los restantes.

12.2) En un proceso productivo de una tela cruda, se producen fallas a razón de 0,7 fallas cada 100 metros. Esta tela es bobinada en rollos de longitud variable pues se corta siempre en la segunda falla. Después, estos rollos se clasifican en dos categorías: de 1ª los que tienen más de 100 metros, y de 2ª los otros. Se desea calcular: a) La longitud media en cada categoría. b) Si se ha recibido un pedido de 10 rollos de 1ª, y se van a sacar del depósito uno por uno, donde están todos mezclados, hasta lograr el pedido, ¿cuál es el número esperado de rollos para concretarlo?

12.3) Un tipo de papel especial se fabrica en rollos de 500 metros de longitud. El proceso productivo trabaja con un promedio de 0,4 fallas cada 1000 metros y se considera de 1ª calidad los rollos sin fallas y de 2ª los otros. Calcular. a) El número promedio de fallas en los rollos de 2ª. b) Si se ha recibido un pedido de 100 rollos de 1ª y se van a sacar del depósito uno por uno, donde están todos mezclados, hasta lograr el pedido, ¿cuál es el número esperado de rollos para concretarlo?

12.4) En una fábrica textil, la longitud de los rollos de una tela cruda queda determinada por la aparición de cada falla. Las fallas se producen al azar, con una tasa desconocida. En un lote se encontraron 225 rollos con longitudes inferiores a 70 metros y 740 rollos con longitudes superiores a 70 metros. Calcular: a) La tasa de fallas. b) La longitud media de cada categoría.

12.5) Una fábrica de cables eléctricos produce un tipo de cable aislado con PVC. Cuando utiliza material recuperado, tiene un promedio de fallas de aislación de 1 cada 400 m. Este cable se revisa y se corta en los puntos donde se encuentra una falla y los rollos así obtenidos se dividen en 3 grupos: a) los mayores a 500 m que se venden con una ganancia de 2 \$/m. b) Los mayores a 100 m con una ganancia de 1,5 \$/m. y c) Los menores a 100 m que se recuperan con una pérdida de 0,5 \$/m y no se venden. Calcular el beneficio promedio: A) Por rollo producido. B) Por rollo vendido. C) Por metro producido. D) Por metro vendido.