

Diseño de Experimentos

Nociones básicas

ALEJANDRO ROBERTI – 2014

UNNOBA

CONTENIDO

1. DESARROLLO HISTÓRICO (3)
2. ¿QUE ES EL DISEÑO EXPERIMENTAL? (3)
 - 2.1. METODOS DE BÚSQUEDA DIRECTA (5)
 - 2.2. DISEÑO DE EXPERIMENTOS VARIANDO TODOS LOS FACTORES A LA VEZ (14)
 - 2.3. METODOS MATEMÁTICOS Y ESTADÍSTICOS (19)
 - 2.4. METODOLOGÍA DEL DISEÑO EXPERIMENTAL (23)
 - 2.5. NOCION DE DISEÑO OPTIMO (25)
 - 2.6. LOCALIZACION DE PUNTOS EXPERIMENTALES (26)
3. DISEÑO FACTORIAL COMPLETO A DOS NIVELES (27)
 - 3.1. DESARROLLO EN HOJA DE CALCULO (34)
 - 3.2. USO DEL ESTADÍSTICO F Y GRADOS DE LIBERTAD (42)
4. DISEÑO FACTORIAL FRACCIONADO O INCOMPLETO (47)
 - 4.1. REDUCCION O FRACCIONAMIENTO (51)
5. DISEÑOS EXPERIMENTALES PARA MÁS DE DOS NIVELES (58)
 - 5.1. DISEÑO ROTABLE COMPUESTO (BOX WILSON) (60)
6. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE SUPERFICIES DE RESPUESTAS (66)
7. CONCLUSIONES (67)
8. MANEJO ESTADÍSTICO DE DATOS OBTENIDOS EN UN ENSAYO (68)
 - 8.1. PRUEBA ESTADÍSTICA DEL FACTOR TEMPERATURA (75)

1 Desarrollo Histórico.

Los Diseños Experimentales fueron utilizados por los agrónomos, desde alrededor de 1929, como un medio idóneo para planificar la realización de experimentos sobre numerosas variables y alternativas como, por ejemplo, la evaluación simultánea de varias variedades de semillas y de diferentes tratamientos. Esta metodología – es más apropiado llamarla “conjunto de métodos” – tuvo una difusión lenta, por un lado debido a un aspecto renovador y por otro debido a la necesidad de realizar, en algunos casos, un importante número de cálculos.

Desde hace algunos años su utilización se extendió al sector químico y agro alimentario, presentando un aumento de interés debido al desarrollo de la informática.

2 ¿Qué es el diseño experimental?

No existe una definición rigurosa para el término. Se trata de una herramienta basada en la inferencia estadística que tiene aplicaciones en diversos campos, aun en el campo de la propia herramienta. Sin embargo existen algunas características importantes que permiten describir el concepto: Básicamente, es un instrumento de

- caracterización (de los pasos y resultados obtenidos en un plan de investigación determinado)
- modelización. Permite la generación de diversos tipos de modelos, algunos simultáneamente: un modelo de trabajo, un modelo predictivo de comportamiento, un modelo final de descripción del fenómeno estudiado, un modelo de comportamiento del modelo de ensayo, etc.

- optimización. Permite realizar optimizaciones en varios planos, nuevamente en algunos de ellos simultáneamente: optimizar el número de ensayos realizados, optimizar el número de variables y parámetros a estudiar, optimizar los procesos estudiados o los tratamientos disponibles, optimizar el modelo descriptivo utilizado, optimizar el criterio empleado en determinado tratamiento o proceso...

En las actividades de investigación y desarrollo hay que planificar una estrategia, para lo cual se establecen dos caminos posibles, el empírico y el determinista.

El método empírico, en principio, se relaciona con un modelo “caja negra”, al cual se llega mediante experimentaciones e identificación de coeficientes.

El método determinista parte de la utilización de un modelo de conocimiento, con el que se validan las experiencias.

En todos los casos se dispone de información, cualitativa y cuantitativa, de un método de optimización y de un comando que es el control de la tarea.

Los métodos tradicionales para planificar experiencias, en general, usan metodologías tales como:

- Hacer variar un factor a la vez, manteniendo los demás constantes. Se demuestra que este proceso no permite obtener óptimos globales ni puede tener en cuenta las interacciones que pudieran existir entre factores.
- Dividir el área experimental, lo cual aumenta el número de ensayos y genera dudas acerca de la precisión.

En contraposición, el método de los diseños experimentales estudia todos los factores simultáneamente y los estudia teniendo en cuenta las interacciones entre los factores, a la vez que incluye métodos para minimizar el número de experimentos necesarios.

2.1 Métodos de búsqueda directa

Como ejemplo se muestra en forma esquemática un método de búsqueda directa, SIMPLEX EvOp¹, cuyos fundamentos generales se muestran en la figura:

¹ Si bien SIMPLEX EvOp es un diseño atractivo conlleva algunos riesgos (ver recuadro SIMPLEX EvOp y sus riesgos).

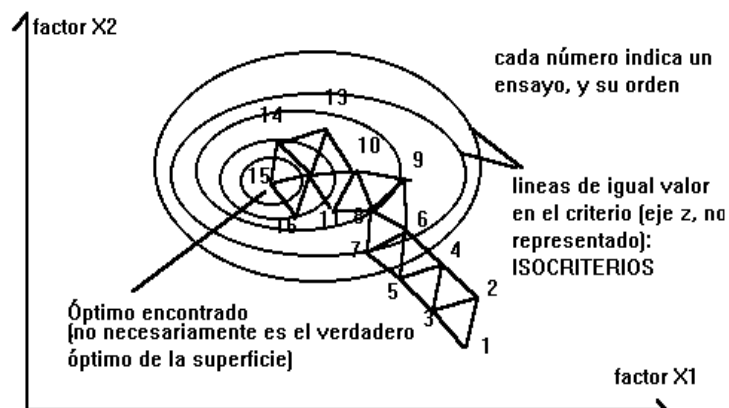
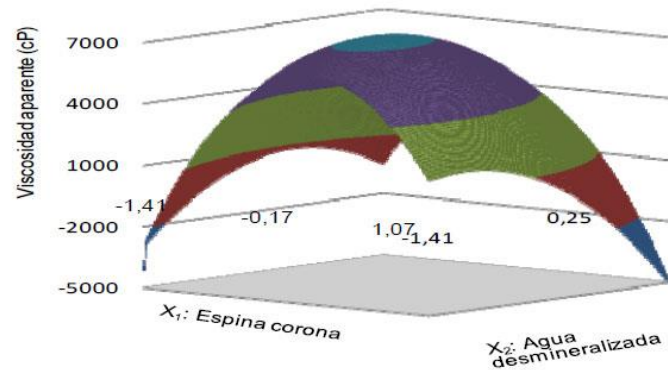
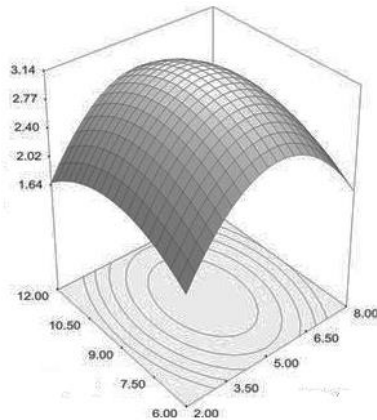


Fig. 1 - Simplex EvOp

La figura 1 representa un campo tridimensional visto en el plano de proyección de dos dimensiones determinadas por sendas variables x_1 y x_2 . La tercera dimensión (la proyectada sobre el plano del dibujo) corresponde al valor que adquiere el criterio (Z) para cada una de las posibles – e infinitas – combinaciones $x_1 - x_2$, si $Z = f(x_1, x_2)$.

En el dibujo se han representado mediante líneas cerradas aquellos puntos que tienen el mismo valor de Z para diversas combinaciones de x_1 y x_2 . Obviamente el investigador desconoce esta superficie de respuesta y debe encontrar el máximo, por lo que realiza experimentos en los puntos (combinaciones de x_1 y x_2 .) numerados y opta por seguir en aquellas combinaciones más alejadas de las que brindan la peor respuesta. Como se ve el método permite examinar cambios de ambas variables simultáneamente.



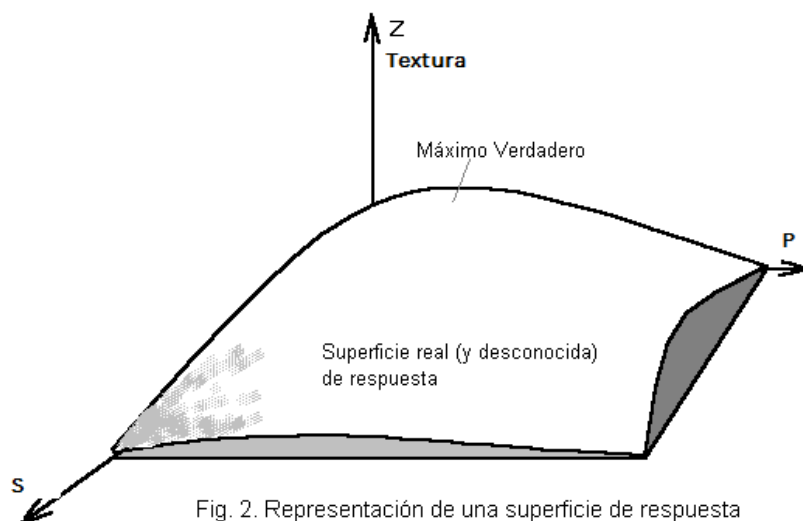
Para entender la diferencia entre este esquema y uno tradicional (en el cual el investigador mueve el valor de una variable por vez – *ceteris paribus* -), debe tenerse en cuenta que en el estudio de variación de un factor por vez, hay errores ligados al método.

Por ejemplo, se realiza el análisis del producto de un proceso, a fin de buscar la mejor textura de un bizcochuelo hecho con harina y fibras dietéticas², sabiendo que ésta depende de dos variables: el porcentaje de sorbitol (S) y el porcentaje de polidextrosa (P) incorporados a la mezcla.

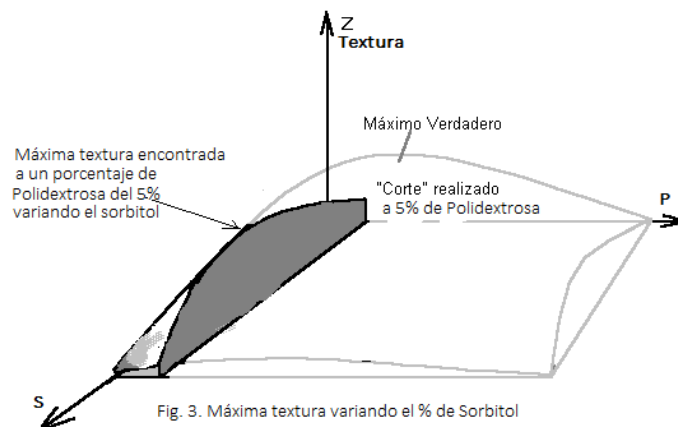
CETERIS PARIBUS

método que consiste en dejar un factor fijo e ir variando el otro hasta encontrar el mejor resultado. En ese punto es este último factor el que se fija y se varía el primero.

² Caracterización química y sensorial de bizcochuelos enriquecidos con fibra dietética y micronutrientes para el anciano. - Emma Wittig de Penna , Paula Avendaño, Delia Soto, Andrea Bunker. Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas. Universidad de Chile- Santiago. Chile



Una forma tradicional de búsqueda consiste en mantener fija la formulación de Polidextrosa (por ejemplo en 5%) y variar el sorbitol hasta encontrar el máximo en la respuesta de textura, (supóngase que corresponde a un porcentaje del 8%).



Ese porcentaje de sorbitol es la variable que se deja fija, se varía ahora la polidextrosa hasta encontrar la mejor textura (que se supone se encuentra a 25%).

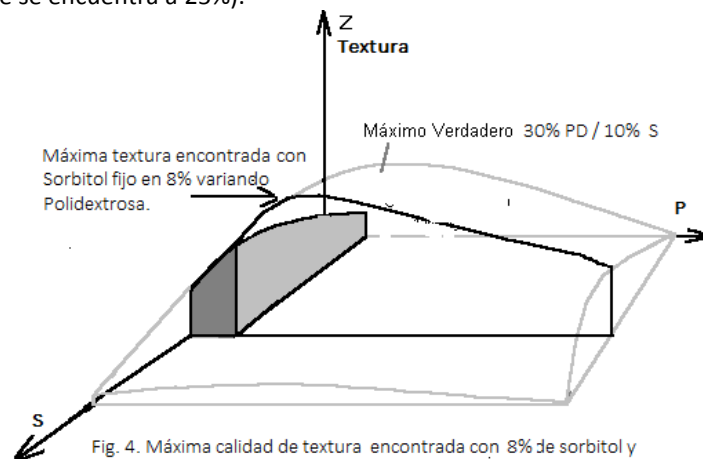


Fig. 4. Máxima calidad de textura encontrada con 8% de sorbitol y 25% de Polidextrosa

Se informa este resultado ($S=8\%$; $PD=25\%$) como la combinación de factores óptima para encontrar la mejor textura. Aparentemente el método seguido es correcto y el resultado debería, por tanto, serlo.

En realidad, cuando la experiencia se hace variando ambos factores, mediante un método de búsqueda directa adecuado, como el SIMPLEX EvOp, es más seguro encontrar el verdadero óptimo, sobre todo en casos como el de la figura que se encuentra en otra zona, con coordenadas que corresponden a $PD = 30\%$ y $S = 10\%$. Para esos valores, el método de fijar una variable y luego la otra tiene pocas probabilidades de coincidencia con la realidad, (depende del valor inicial arbitrario fijado para una de las variables a “congelar”), mientras que con SIMPLEX las probabilidades son más altas.

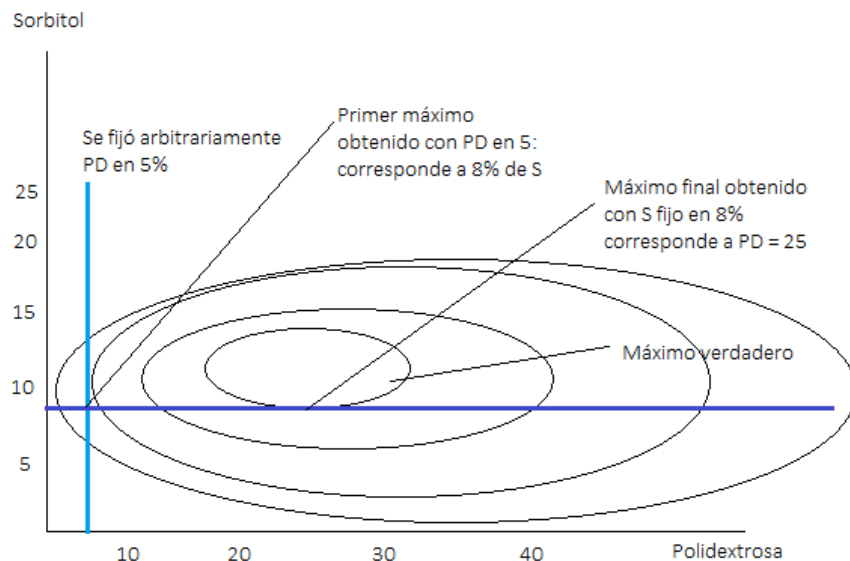


Fig. 5. Vista en plano de la superficie de respuesta

SIMPLEX EvOp y sus riesgos

Uno de los riesgos de utilizar el atractivo método Simplex EvOp es el de llegar a un óptimo local. Puede inducir, además, a confusiones de operador si, por ejemplo el paso para elegir cada ensayo (diferencia de valor en cada factor X_1 y X_2 en la figura) es muy grande y se “saltea” el óptimo.

2.2 Diseños de experimentos variando todos los factores a la vez

Ahora bien ¿qué ocurre cuando se quieren estudiar varios factores? Como ya se mencionó, el mejor método es variar todos los factores a la vez. Si hay dos factores que determinan un resultado buscado, es evidente que corresponde un valor por cada uno de los infinitos valores de cada factor combinado con cada uno de los infinitos valores del otro. En el caso de la textura, visto más arriba, si ésta se mide con una cantidad T que es función de %PD y de %S, significa $T=f(PD,S)$ y por tanto habrá una textura T_n para cada par ordenado PD_i, S_j . ¿Quiere decir que hay que hacer un número ilimitado de ensayos que correspondan a las combinaciones posibles de cada valor de cada factor con las del otro?

Se podría pensar que, en la práctica, no es posible ensayar infinitos valores de PD y de S aunque estas sean variables continuas. En efecto, siempre hay extremos, lo cual limita el campo de variabilidad: se sabe que el porcentaje de povidona varía entre extremos más razonables que 0 y 100. Si por ejemplo se ensayara con pH,

se sabe que hay valores que no son admisibles o que ciertos ingredientes no lo soportan, por lo cual se descartan los extremos. Lo mismo puede afirmarse con la temperatura. Una vez dentro de ese rango, es usual elegir un valor para el “cambio”, o un “paso” de la variable: se cambiará el porcentaje de povidona o de sorbitol cada décima, cada unidad o cada centésima. Si trabajáramos con temperatura se variará de a un grado, de a medio o de a dos. Nuevamente el aparente número ilimitado ya no lo es, sino que sería razonablemente manejable, aunque aun puede ser muy grande.

Si se adoptan solamente estas previsiones es posible encontrar un diseño como el visto: el SIMPLEX, efectivamente, parte de un campo de variabilidad (extremos entre los cuales varían los factores) y de la elección de un “paso” o “salto” entre dos valores sucesivos de cada factor (distancia entre los vértices de cada triángulo).

Si no se quiere usar SIMPLEX EvOp, un segundo acercamiento es, en lugar de fijar un “paso” de variabilidad, determinar un número fijo para la variación de los factores, a ese número de valores posibles de cada factor se lo llamará NIVEL. Ese número de niveles puede ser muy pequeño (dos) o tan grande como con el sistema de pasos (diez, por ejemplo, si se decide explorar un rango de 10 de a una unidad por vez).

Supóngase, entonces que se decide que los dos factores variarán en dos niveles cada uno, por ejemplo, una determinada característica (un color deseable) depende del pH y de la temperatura de horneado, en el mismo caso de los biscochos. Así se establecen los rangos de variabilidad de cada factor: el pH puede oscilar entre 4 y 6 y la temperatura de horneado entre 120 y 150 °C:

Factor	Nivel bajo	Nivel alto
pH	4	6
Temperatura	120	150

Esto significa que deben programarse los siguientes experimentos:

Experimento N°	pH	Temperatura
1	4	120
2	4	150
3	6	120
4	6	150

Para aumentar la exactitud resulta evidente que hay que aumentar el número de niveles. También es probable que se deba trabajar con más factores que dos, ya que en la realidad los factores condicionantes son varios.

En cualquier caso, el número de experiencias que deberán realizarse será:

$$N^{\circ} \text{ niveles}^{N^{\circ} \text{ factores}}$$

Por lo cual, un experimento que involucre 7 factores a 5 niveles por factor constará de

$$5^7 = 78125 \text{ experiencias.}$$

Como generalmente es imposible planificar una secuencia de experimentos de este tamaño, debe buscarse, entonces, una alternativa que permita realizar menos experimentos, a fin de llegar a un resultado igualmente confiable.

Hay opciones para disminuir el número de experiencias:

a. Disminuir el número de niveles, por ejemplo pasar de

$$5^7 = 78125$$

$$3^7 = 2187$$

$$2^7 = 128$$

b. Disminuir el número de factores, por ejemplo:

$$5^7 = 78125$$

$$5^4 = 625$$

c. Combinar ambas alternativas, por ejemplo:

$$3^4 = 81$$

En realidad, existen procedimientos que permiten realizar estas búsquedas con la menor cantidad posible de experiencias. Para el caso de 7 factores a 5 niveles se realizan sólo 162 experiencias, variando los niveles de todos los factores a la vez, programadamente.

El objetivo común a estos métodos es:

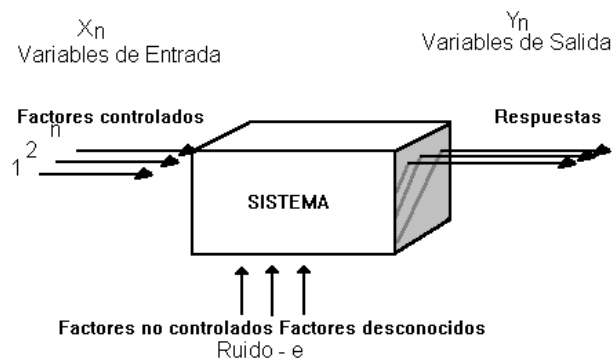
- disminuir el número de ensayos
- detectar las interacciones
- detectar el o los óptimos
- modelizar los resultados

2.3 Métodos Matemáticos y Estadísticos

Utilizando una experimentación metódica se logrará realizar un mínimo de ensayos y obtener la máxima información posible.

Se aplican estos métodos para

- Seleccionar los factores a estudiar. Evaluar los factores influyentes. Implica optimizar el método de experimentación a optimizar.
- Estudiar un proceso. Transformación, formulación de productos. También para interpretar, dimensionar, regular y modelizar ese proceso.
- Optimizar un proceso.



El modelo global de comportamiento es:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_p) + e$$

Donde Y_n representa el comportamiento de todos los factores controlados o que pueden ser controlados y que operan sobre el sistema como producto del procesamiento de las variables de entrada.

Al sistema también ingresan aquellos factores imposibles de controlar o, aun, aquellos factores que no se conocen. Esto da como resultado una serie de variables que operan sobre el sistema y sobre las que no hay posibilidad de control. Este conjunto es el ruido.

Finalmente el sistema opera mediante una función de cambio para cada factor que da como resultado un conjunto de variables de salida, o respuesta. Este conjunto se obtiene operando cada variable de entrada por la función más el ruido, que, a los efectos de cálculo, puede ser pensado como error. Otros términos que se utilizan son: superficie de respuesta (espacio que representa el conjunto de valores de la función $f(x_i)$, e “isocriterios” o “isorespuestas”) (Fig. 5)

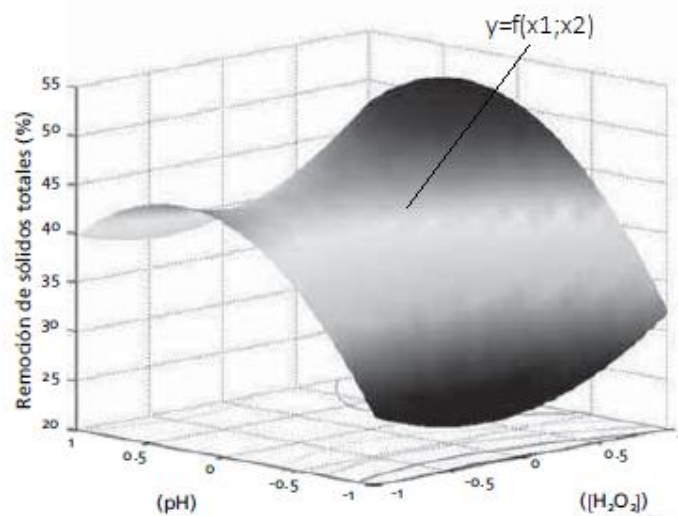
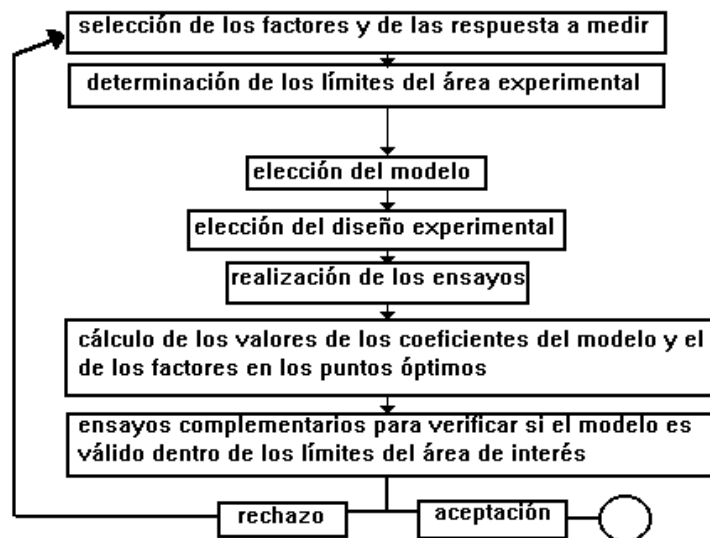


Fig. 5

2.4 Metodología del Diseño Experimental



Obviamente el primer paso, a pesar de ser trivial, debe verificarse siempre y planificarse cuidadosamente. Solamente conociendo la mayor cantidad posible de factores y seleccionando de entre ellos cuáles serán los utilizados, se puede elegir un método adecuado. Lo mismo será la determinación de las respuestas a medir. Respuesta significa el indicador que nos da el modelo sobre la influencia de cada factor.

También es importante restringir con toda claridad los límites del área experimental. Límites extensos pueden resultar en aumentos enormes del número de ensayos necesarios, probablemente en zonas donde se sabe que no hay posibilidades reales (por ejemplo un pH extremo) o que dan combinaciones ya probadamente peligrosas (pH 7 y $t=30^{\circ}\text{C}$, por ejemplo).

Recién cuando efectivamente se conoce el campo experimental se podrá elegir el modelo de trabajo y realizar el diseño experimental.

Terminadas estas etapas, se realizarán los ensayos, siguiendo la programación. De ello se obtendrán datos, con los cuales se intentará el ajuste al modelo y la determinación de los parámetros óptimos. Para que el modelo sea considerado válido, debe ser predictivo dentro de sus límites y dentro de los márgenes del error, que, a esta altura, debe estar cuidadosamente calculado.

El punto siguiente entonces será la verificación de la predicción de óptimo del modelo, mediante ensayos. La cantidad de ensayos deberá ajustarse en función del error ya estimado.

Terminada estas etapas se está en condiciones de tomar la decisión de aceptar o rechazar la propuesta formulada. Ahora bien, este es un esquema global de un diseño experimental. Sin embargo debe tenerse en cuenta que el propio diseño podría ser optimizado.

2.5 Noción de Diseños Óptimos

Frente a un programa de experimentos es necesario establecer dos objetivos que, en primer análisis, aparentan ser contradictorios:

- EL MENOR NÚMEROS DE ENSAYOS POSIBLE
- LA MÁXIMA PRECISIÓN EN LOS RESULTADOS POSIBLE.

Siempre es deseable utilizar todos los factores en cada experiencia, para lo cual se deben examinar cuidadosamente las experiencias programadas.

2.6 Localización de los Puntos Experimentales

En un diseño en dos niveles debe tenerse en cuenta que la recta o la función de respuesta se podrá definir mejor si los puntos que representan los datos están suficientemente alejados. Por ello, los puntos experimentales deben estar en o cerca de los extremos del área de trabajo.

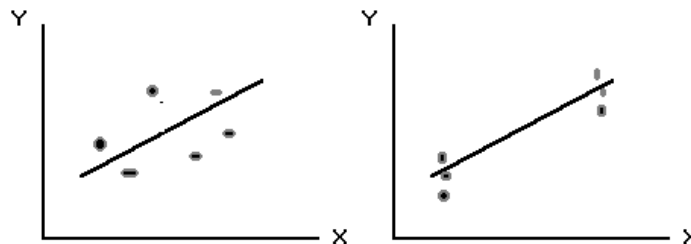


Fig. 7. Localización de puntos experimentales

2.7 Diseño Óptimo

Se llama diseño óptimo a aquel más económico que brinde la mayor información sobre los parámetros buscados:

- Mostrará la variación de TODOS los factores en cada experiencia
- Tendrá los puntos experimentales en los límites del área de trabajo.

3 Diseños Factoriales Completos a dos Niveles.

Un diseño factorial COMPLETO es aquel que requiere realizar el siguiente número de experiencias:

$$\text{número de experiencias} = n^k.$$

Donde n representa el número de niveles
 k representa el número de factores

Este diseño presenta varias ventajas: es simple, requiere un número de experiencias relativamente bajo (depende de como se eligieron los factores y los niveles), y, además, permite la elección de los factores.

Si, por otro lado, lo que se busca es describir respuestas lineales, resulta imposible optimizar.

Ejemplo: Se estudia el rendimiento de una reacción química que depende de 2 factores: temperatura y presión, cada uno de los cuales varía en dos niveles, bajo y alto.

Como es un problema 2^2 , se deben realizar 4 ensayos o experiencias. El primer paso es definir el valor de los factores y el de los niveles:

	Factor 1 (Temperatura) T	Factor 2 (Presión) P
Nivel -1 (bajo)	60°C	1 bar
Nivel +1 (alto)	80°C	2 bar

Con estos datos es posible realizar la MATRIZ DE EXPERIMENTOS:

Número del ensayo	Factor 1 T	Factor 2 P	Respuesta η
1	-1	-1	60
2	+1	-1	70
3	-1	+1	80
4	+1	+1	95

La columna de la derecha indica el resultado encontrado al realizar la experiencia y anotado en cada uno de los ensayos.

La MATRIZ DE LOS EFECTOS se construirá así:

Número del ensayo	Media	Factor 1 T	Factor 2 P	Interacción P-T	Respuesta
1	+1	-1	-1	+1	$y_1=60$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2=70$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3=80$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4=95$

Divisor	4	4	4	4
---------	---	---	---	---

Efectos	76,25	6,25	11,25	1,25
---------	-------	------	-------	------

La columna marcada “Media” indica, para cada ensayo, el factor de ponderación respecto a la media de todos los niveles.

Aparece una nueva columna que representa cual es el grado de interacción entre los factores, en este caso, el 1 y el 2, cuyos valores se obtienen mediante el producto lógico entre los niveles correspondientes a cada ensayo: dos ensayos extremos producen una interacción máxima. Al contrario, dos ensayos antepuestos, por efectos compensatorios, producen la mínima interacción.

Con estos datos, para cada columna se obtiene un divisor, proveniente del número de ensayos evaluados, 4 en este caso para todos.

A renglón seguido se calculan los efectos:

- **Efecto de la media**

$$Em = \frac{1}{4}[(y_1 \times m_1) + (y_2 \times m_2) + (y_3 \times m_3) + (y_4 \times m_4)] = \frac{1}{4}[(60 \times 1) + (70 \times 1) + (80 \times 1) + (95 \times 1)]$$

$$Em = 76,52$$

donde m_i es la media de cada ensayo.

- **Efecto de la temperatura**

$$Et = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(y_4 - y_3) \right] = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) =$$

$$Et = \frac{1}{4}(-60 + 70 - 80 + 95) = 6,25$$

Donde $(y_2 - y_1)$ significa la diferencia, para cálculo del promedio, de la respuesta que se obtiene cuando la temperatura está baja y alta mientras la presión está baja.

De la misma manera $(y_4 - y_3)$ representan las respuestas entre los dos niveles de temperatura cuando la presión está alta.

- **Efecto de la presión**

Se sigue el mismo razonamiento:

$$Ep = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(y_3 - y_1) + \frac{1}{2}(y_4 - y_2) \right] = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) =$$

$$Et = \frac{1}{4}(-60 - 70 + 80 + 95) = 11,25$$

- **Efecto de la interacción Temperatura Presión³**

De la misma manera:

³ Se analizó la interacción para presión alta y baja. Podría haber realizado el análisis para Temperatura alta y baja y aún podría realizarse como promedio de ambas medidas (1,25; 0,75 y 1 respectivamente). En este caso las diferencias no son significativas frente al valor de los otros coeficientes hallados.

$$Etp = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (y_4 - y_3) + \frac{1}{2} (y_1 - y_2) \right] = \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 + y_4) =$$

$$Etp = \frac{1}{4} (60 - 70 - 80 + 95) = 1,25$$

El modelo será:

$$Y = 6,25T + 11,25P + 1,25PT + 76,25$$

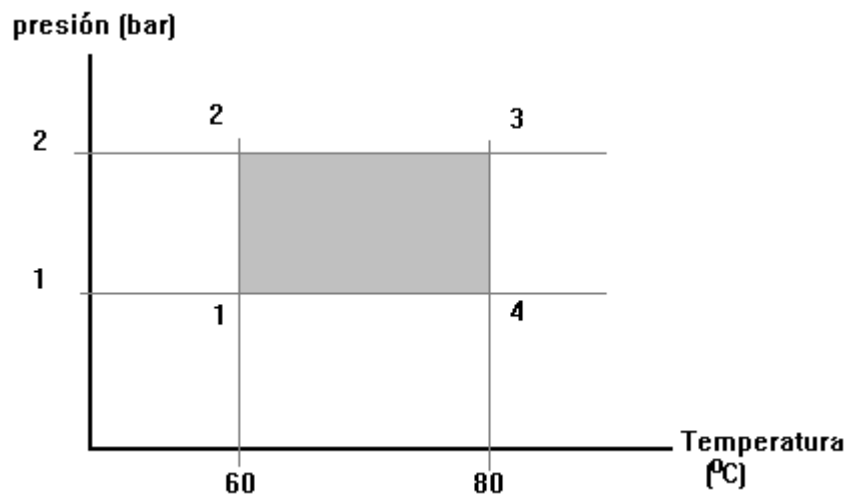


Fig. 8. Representación del área experimental.

3.1 Desarrollo en Hoja de Cálculo:

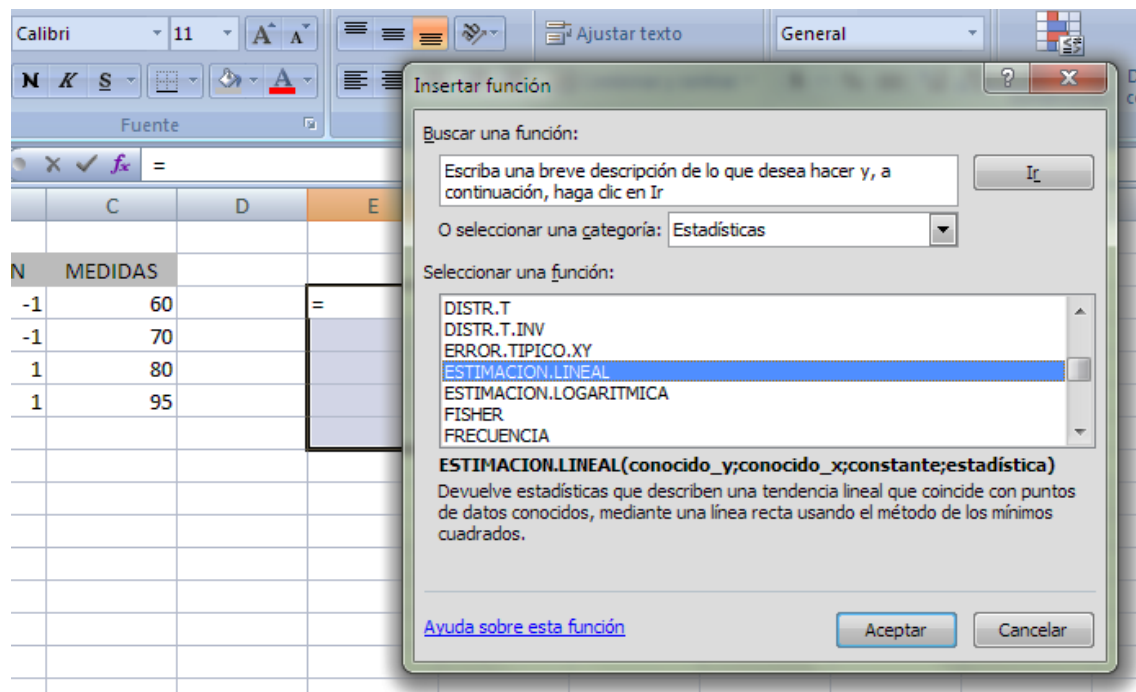
Se puede partir de un arreglo de datos en cualquier parte de una hoja, por ejemplo:

TEMP.	PRESION	PT	MEDIDAS	
-1	-1	1	60	
1	-1	-1	70	
-1	1	-1	80	
1	1	1	95	

Se selecciona, en otro sector en blanco de la hoja, un rango de cuatro columnas y cinco filas, de manera tal que ese conjunto de celdas en blanco quede “iluminado”.

Luego se selecciona, la función (Botón fx) estadística “ESTIMACION.LINEAL”

[illegible]



Y se rellena el cuadro de diálogo que aparece al aceptar, de la siguiente manera:

The image shows an Excel spreadsheet with data in columns A, B, C, and D. Rows 3 to 6 contain data for TEMP, PRESION, and PT. A formula bar at the top shows the formula =LINEST(D3:D6, A3:C6, verdadero, verdadero). A screenshot of the 'Argumentos de función' (Function Arguments) dialog for the LINEST function is overlaid on the spreadsheet. The dialog shows the following arguments:

- Conocido_y: D3:D6
- Conocido_x: A3:C6
- Constante: verdadero
- Estadística: verdadero

The dialog also displays the array formula: {=LINEST(D3:D6, A3:C6, TRUE, TRUE)} and the resulting array: {1,25;11,25;6,25;76,25;0;0;0;0;1;0;#N/A}.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	TEMP.	PRESION	PT	MEDIDAS				
4	-1	-1	1	60				
5	1	-1	-1	70				
6	-1	1	-1	80				
7	1	1	1	95				

Luego, en lugar de pulsar “Aceptar” se pulsará la combinación de teclas CTRL-SHIFT-ENTER, con lo que se obtiene la siguiente matriz:

F3 fx {=ESTIMACION.LINEAL(D3:D6;A3:C6;VERDADERO;VERDADERO)}										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	TEMP.	PRESION	PT	MEDIDAS						
3	-1	-1	1	60		1,25	11,25	6,25	76,25	
4	1	-1	-1	70		0	0	0	0	
5	-1	1	-1	80		1	0	#N/A	#N/A	
6	1	1	1	95		#¡NUM!	0	#N/A	#N/A	
7						668,75	0	#N/A	#N/A	
8						#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	
9										
10										
11										

La interpretación de la tabla obtenida es la siguiente:

1) en el proceso de carga, si en la ventana “Constante” se escribe, como se ha hecho, (VERDADERO) es que se considera la recta con la ordenada al origen b de la forma $y = b + mx$. Si fuera falso o se omitiera, la recta sería $y = mx$, recalculándose la (o las) pendiente(s) m.

2) si en la ventana “Estadística” se escribe VERDADERO, como fue escrito, es que se calcularán los estadísticos de regresión adicionales. Si se omite o se pone FALSO, solo se devuelve los valores de las pendientes y, si corresponde, de b.

3) La codificación de la matriz resultante es la siguiente:

m_n	m_{n-1}	...	m_2	m_1	b
se_n	se_{n-1}	...	se_2	se_1	se_b
r_2	se_y				
F	df				
ss_{reg}	ss_{resid}				

I) m_j es la pendiente (o coeficiente de x_j , para $j=n$ hasta 1):

así, en el ejemplo:

$m_3 = 1,25$ (Interacción PT)

$m_2 = 11,25$ (Presion)

$m_1 = 6,25$ (Temp)

II) b es la ordenada al origen.

$b = 76,25$, en el ejemplo

III) se_j es el valor del error estándar correspondiente a cada m_j . En el último valor será se_b que corresponde al error estándar de la ordenada al origen b (en el ejemplo es cero porque se usó la interacción. No quedaron márgenes para calcular ajuste)

IV) r^2 es el coeficiente de determinación. Compara los valores calculados de y y los y reales. Varía entre 0 a 1. Si es 1, hay una correlación perfecta en la muestra, es decir, no hay diferencia entre el valor y calculado y el valor y real. En el otro extremo, si el coeficiente de determinación es 0, la ecuación de regresión no es útil para predecir un valor de y . (en el ejemplo es ajuste perfecto, por la interacción)

V) se_y es el error estándar de y

VI) F es el valor F observado. Se utiliza para determinar si la relación observada entre las variables dependientes e independientes se produce por azar. En el ejemplo surge un error al dividir por cero (ya que no se dejaron grados de libertad para el error)

VII) df Son los grados de libertad. Se usan para encontrar valores F críticos en una tabla estadística y para determinar un nivel de confianza para el modelo

VIII) ss_{ref} y ss_{resid} son la suma de regresión de los cuadrados y la suma residual de los cuadrados

La pantalla que se obtendría sin usar la interacción y dejando grados de libertad para el error, tendría el siguiente aspecto:

TEMP.	PRESION	MEDIDAS
-1	-1	60
1	-1	70
-1	1	80
1	1	95

11,25	6,25	76,25
1,25	1,25	1,25
0,99065421	2,5	#N/A
53	1	#N/A
662,5	6,25	#N/A

Se aprecia que el error estándar es la interacción, que la bondad del ajuste es del 99% y que quedó 1 grado de libertad para el error.

El modelo resultante es:

$$Y = 1,25 PT + 11,25 T + 6,25 P + 76,25$$

O bien

$$Y = 11,25 T + 6,25 P + 76,25 \text{ con un error estándar de } 1,25$$

3.2 Uso del estadístico F y Grados de Libertad

NOTA: Este tema se desarrolla con más detalles en el ítem “Prueba estadística del factor temperatura” más adelante en este capítulo.

En el ejemplo anterior, el coeficiente de determinación, o r^2 , es 0,99065421 en el resultado de ESTIMACION.LINEAL, que indicaría una relación estrecha entre las variables independientes y el rendimiento.

Se puede utilizar el estadístico F para determinar si estos resultados, con este valor r^2 tan alto, se produjeron por azar.

Supóngase por un momento que, en realidad, no existe relación entre las variables, pero que ha extraído una muestra que casualmente hace que el análisis estadístico demuestre una relación marcada. El término " α " se utiliza para la probabilidad de llegar a la conclusión errónea de que existe una relación.

Los valores F y df del resultado de la función ESTIMACION.LINEAL se pueden utilizar para determinar la probabilidad de que se produzca por azar un valor F más elevado.

F se puede comparar con los valores críticos de las tablas de distribución F o se pueden utilizar las funciones DISTR.F y DISTR.F.INV de Excel para calcular la probabilidad de que se produzca por azar un valor F mayor.

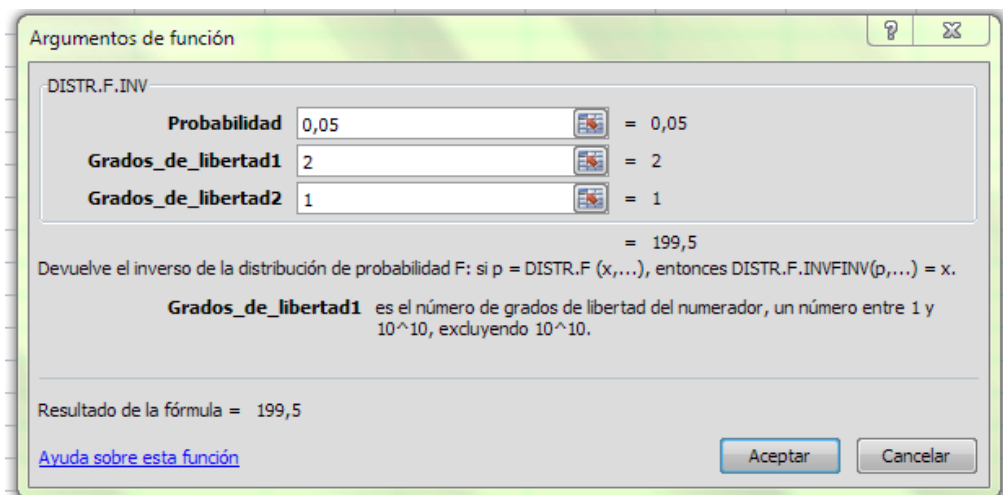
La distribución F apropiada tiene los grados de libertad v_1 y v_2 . Si n es el número de puntos de datos, entonces $v_1 = n - df - 1$ y $v_2 = df$.

La función DISTR.F.INV (con la sintaxis DISTR.F.INV(p, v_1, v_2)) devolverá el valor crítico de F:

Supóngase un $\alpha = 0,05$,

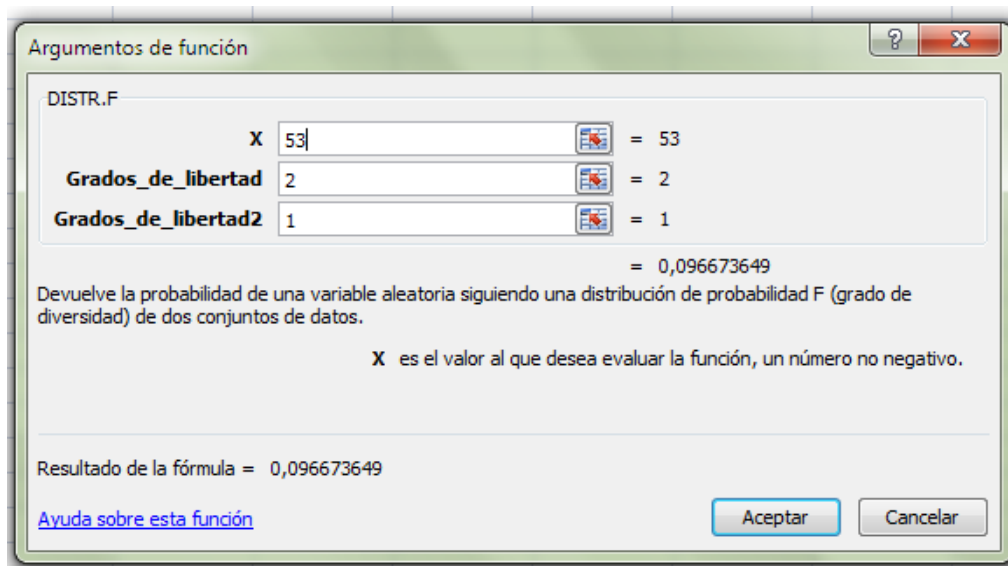
$$V_1 = n - df - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

$$V_2 = df = 1$$



lo que da un valor crítico para F de 199,5 . Como el F muestral ($F = 53$) es mucho más bajo que 199,5, es probable que un valor F tan bajo se produzca por azar. (Con Alfa = 0,05, la hipótesis de que no hay relación entre **conocido_y** y **conocido_x** hay que rechazarla cuando F sobrepasa el nivel crítico, 199,5).

¿Cuál es la probabilidad de que se produzca por azar? Se utiliza DISTR.F para evaluar que probabilidad hay que el valor de F (53) se haya obtenido por azar: (10% de probabilidad)



Argumentos de función

DISTR.F

X	53	=	53
Grados_de_libertad	2	=	2
Grados_de_libertad2	1	=	1

= 0,096673649

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria siguiendo una distribución de probabilidad F (grado de diversidad) de dos conjuntos de datos.

X es el valor al que desea evaluar la función, un número no negativo.

Resultado de la fórmula = 0,096673649

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar Cancelar

Se puede concluir, bien buscando el nivel crítico de F en una tabla, bien utilizando la función DISTR.F , que la ecuación de regresión es útil o no para predecir el valor del rendimiento de los procesos en función de la temperatura y la presión. Recuérdese que es vital utilizar los valores correctos de v_1 y v_2 .



4 Diseños Factoriales Fraccionados o Incompletos

Ejemplo: Se desea obtener una emulsión con tres factores a dos niveles cada uno. La respuesta buscada es la estabilidad de la emulsión.

Si se desea hacer un ensayo factorial completo es necesario realizar 8 ensayos, puesto que N° de ensayos:

$$2^3 = 8.$$

Factor	Nivel Bajo (-)	Nivel Alto (+)
1-Ácido Graso	Baja Concentración	Alta Concentración
2-Ácido orgánico	Poca dilución	Mucha dilución
3-Tipo de emulsificante	A	B

Matriz de efectos del diseño completo:

Nº Ensayo	Media	Fact. 1	Fact. 2	Fact. 3	Inter. 1-2	Inter. 1-3	Inter. 2-3	Inter. 1-2-3	Respuesta
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	38
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	37
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	26
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	24
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	30
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	28
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	19
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	16

Divisor	8	8	8	8	8	8	8	8
---------	---	---	---	---	---	---	---	---

Efectos	27,25	-1	-6	-4	-0,25	-0,25	-0,25	0
---------	-------	----	----	----	-------	-------	-------	---

Si se quisieran efectuar menos ensayos es posible realizar un diseño incompleto o fraccionado. A continuación se muestra la matriz de efectos para un diseño fraccionado obtenido a partir de la tabla anterior:

Nº Ensayo	I	Fact.1	Fact.2	Fact.3	Int. 1-2	Int. 1-3	Int. 2-3	Int. 1-2-3
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Divisor	4	4	4	4
---------	---	---	---	---

Efectos	27,2	-0,75	-6,25	-4,25
---------	------	-------	-------	-------

Sin embargo, al realizar esta reducción encontramos un “costo oculto” que debe tenerse en cuenta: si se observa detenidamente la tabla de arriba se verá que en el conjunto de ensayos cada vez que el factor 1 pasa de -1 a +1, la interacción 2-3 pasa también de -1 a +1, por lo cual sería imposible saber si la variación en la respuesta obedece a la variación del factor 1 o a la variación de la interacción de los otros dos factores. Existen, por tanto, respuestas que pueden obedecer a efectos de factores o a efectos de las interacciones. Si llamamos L_i a la respuesta y E_i al efecto:

$$L_1 = E_1 + E_{23}$$

$$L_2 = E_2 + E_{13}$$

$$L_3 = E_3 + E_{12}$$

$$L_M = I + E_{123}$$

Cada uno de estos enmascaramientos se denomina *alias*:

Para el factor 1:

su alias es la interacción del 2 y el 3

$$L_1 = E_1 + E_{23}$$

Para el factor 2

su alias es la interacción del 1 y el 3

$$L_2 = E_2 + E_{13}$$

Para el factor 3

su alias es la interacción del 1 y el 2

$$L_3 = E_3 + E_{12}$$

El modelo matemático para diseños 2^k es, para primer orden:

$$Y = b_0 + \sum b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j$$

donde b_0 es la media,

b_i es el efecto del factor i

b_{ij} es el efecto de la interacción ij

4.1 Reducción o fraccionamiento

Existen varios métodos. No debe dejarse un conjunto de experimentos que quede desbalanceado, o sea, que el número de cambios para cada factor sea diferente al de los demás. Esto restringe el campo de fraccionamientos, así en diseños 2^3 solo es posible un fraccionamiento (donde cada fraccionamiento queda con un número total de experiencias igual al número de experiencias originales/2), en el de 2^7 , se admiten cuatro fraccionamientos (donde cada uno tiene el número original de experiencias/8).

Como ejemplo de fraccionamiento se analiza el anteriormente visto, del cual solo se toma la parte de la tabla que corresponde a los factores, sin las interacciones, reemplazando el nivel bajo (-) por cero (0) y el nivel alto (+) por uno (1), se determinan dos grupos: el grupo en que la suma de los renglones (de los ensayos) es par y el conjunto remanente que es impar. Se dejan sin sombrear los pares y sombreados los impares:

Nº Ensayo	Σ	Fact. 1	Fact. 2	Fact. 3				
1	0	0	0	0				
2	1	1	0	0				
3	1	0	1	0				
4	2	1	1	0				
5	1	0	0	1				
6	2	1	0	1				
7	2	0	1	1				
8	3	1	1	1				

Si se selecciona el subgrupo de los “impares”, se observa que presenta cuatro ensayos, en el conjunto cada factor está dos veces en el nivel bajo y las otras dos en el alto.

Nº de ensayo		Fact. 1	Fact. 2	Fact. 3
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
5	1	0	0	1
8	3	1	1	1

Si se selecciona el de los “pares”, se tendrá un cuadro similar al anterior: cuatro ensayos, balanceados.

Nº de ensayo		Fact. 1	Fact. 2	Fact. 3
1	0	0	0	0
4	2	1	1	0
6	2	1	0	1
7	2	0	1	1

Cuando hay mas factores se hacen “cortes” sucesivos, con criterios similares al anterior. Por ejemplo separando los dos grupos de pares e impares, y sobre estos operar con algún otro criterio (división modular, etc.).

También es posible realizar estas combinaciones utilizando una planilla electrónica de cálculo, donde resulta muy cómodo escribir la tabla completa y -utilizando las funciones lógicas y BUSCAR- encontrar la matriz reducida. El siguiente es un ejemplo para cuatro factores en dos niveles.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Cuatro factores a dos niveles: Diseño completo.															
2		f1	f2	f3	f4	f1f2	f1f3	f1f4	f2f3	f2f4	f3f4	f1f2f3	f1f2f4	f1f3f4	f2f3f4	f1f2f3f4
3	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
4	2	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
5	3	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	4	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
7	5	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1
8	6	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
9	7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
10	8	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
11	9	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
12	10	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
13	11	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
14	12	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
15	13	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
16	14	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
17	15	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
18	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19																

Fig. 9. Carga de la tabla completa con las interacciones calculadas como producto.

	R	S	T	U	V	W	X
Diseño reducido				a: Método de reducción			
	f1	f2	f3	f4	Suma		
1	0	0	0	0	0		
2	0	0	0	1	1		
3	0	0	1	0	1		
4	0	0	1	1	2		
5	0	1	0	0	1		
6	0	1	0	1	2		
7	0	1	1	0	2		
8	0	1	1	1	3		
9	1	0	0	0	1		
10	1	0	0	1	2		
11	1	0	1	0	2		
12	1	0	1	1	3		
13	1	1	0	0	2		
14	1	1	0	1	3		
15	1	1	1	0	3		
16	1	1	1	1	4		

Fig. 10. a: se copió la parte de la tabla completa que corresponde a solamente los factores. b: con "Reemplazar" se reemplazaron los "-1" por "0". c: Con SUMAR se obtuvo la columna suma. Se eligen los renglones cuya suma es par.

20	Diseño reducido. b: Matriz reducida															
21		f1	f2	f3	f4	f1f2	f1f3	f1f4	f2f3	f2f4	f3f4	f1f2f3	f1f2f4	f1f3f4	f2f3f4	f1f2f3f4
22	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
23	4	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
24	6	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
25	7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
26	10	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
27	11	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
28	13	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
29	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30																

Fig. 11. Utilizando como valor de comparación el número de ensayo, y con la función BUSCAR en forma exacta (en FALSO), se obtiene la tabla incompleta. Se resuelve con ESTIMACION.LINEAL como fue visto.

Con este método aparecen celdas que tienen el mismo significado sobre la respuesta. Por ejemplo, si hay un cambio dado en la respuesta originado por un cambio en el factor f1 no puede asegurarse que se deba a eso porque cada vez que cambia el factor f1 también cambia exactamente igual la interacción f2f3f4.

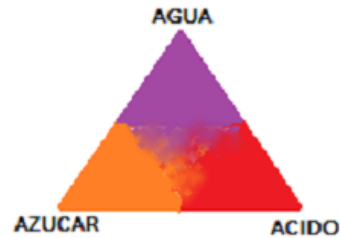
Los alias que se pueden encontrar en la fig 11 son:

F1	F2F3F4
F2	F1F3F4
F3	F1F2F4
F4	F1F2F3

5 Diseños experimentales para más de dos niveles

Cuando hay que experimentar en más de dos niveles, los diseños factoriales son más difíciles de manejar en matrices codificadas como las vistas hasta aquí. Hay varias alternativas posibles:

- Diseño factorial 3^k
- Diseño rotatable compuesto
- Diseño en red de Doehlert
- Área evolutiva
- Diseño de mezcla (responden a restricciones tipo $\sum X_i = 1$) y tienen la forma general:



La modelización matemática de estos diseños será

$$Y = b_0 + \sum b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j + \sum b_{ii} X_i^2$$

donde el último monomio es el efecto de curvatura o efecto cuadrático.

Sin embargo, con estos métodos debe tenerse en cuenta que es difícil visualizar tendencias asintóticas, fenómenos de saturación y óptimos locales.

5.1 Diseño rotatable compuesto (Box-Wilson)

Es el método más clásico, se asocia a un modelo de segundo orden. El número de experiencias (mínimo) se encuentra con

$$N^{\circ}E = 2^k + 2k + 3$$

donde k es el número de factores.

Ejemplo en un área experimental de dos factores (área plana), en cinco niveles.

Los niveles originales son tres Un nivel bajo (-1), un nivel alto (+1) y un nivel intermedio o central (0), asociado al “punto conocido” (la receta, la costumbre, la especificación o, simplemente el final de una búsqueda directa).

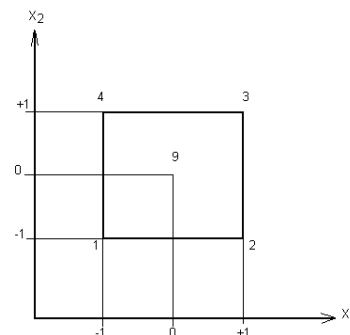


Fig. 12. Diseño rotatable compuesto para dos variables.
Niveles antes de rotar.

Estos primitivos tres niveles delimitan un área experimental “inicial” con forma de un cuadrado y cinco puntos de experimentación (el 1, el 2, el 3, el 4 y el central 9). En cada punto existen las diversas combinaciones nivel-factor.

Esos puntos brindan datos experimentales que deben ser analizados. Como este caso es un caso de búsqueda de optimización sobre superficie curva, un análisis estadístico de los resultados permite saber si se está en las proximidades del óptimo. De dar esto positivo, se “gira” el diseño y se encuentran nuevos puntos experimentales (puntos “estrella”) en niveles diferentes a los anteriores, así ahora hay otros cuatro nuevos puntos (el 5, el 6, el 7 y el 8) y se hace un nuevo ensayo repitiendo el punto central (10). Esto permite entonces definir niveles diferentes a los del principio, que eran $-1,0$ y $+1$, agregando los dos niveles nuevos: el $-1,41$ y el $+1,41$.

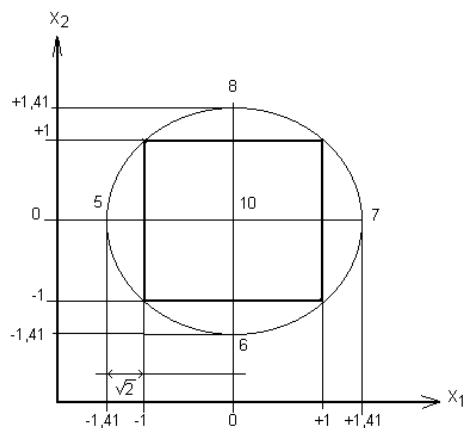


Fig. 13. El mismo diseño de la fig. anterior con los puntos “de rotación” marcados

En resumen:

El cuadrado representa los puntos del diseño factorial 2^2 niveles -1 y +1 (2^k)

1. (-1,-1)
2. (+1,-1)

3. (+1,+1)

4. (-1,+1)

El círculo representa los puntos en estrella “girados” del cuadrado 2 x 2 (2k)

5. (-1,41,0)

6. (0,-1,41)

7. (+1,41,0)

8. (0,+1,41)

Por último hay 3 repeticiones del punto central (sirven para testear el error experimental)

Así, el ensayo es $2^2 + 2 \times 2 + 3 = 11$ experiencias.

El mismo método, aplicado ahora a 3 factores, nuevamente determina cinco niveles (tres niveles de partida y dos agregados por la rotación) daría estos resultados:

Niveles: -1,73; -1; 0; +1; +1,73 ($1,73 = \sqrt{3}$ o sea raíz del nº de factores)

Puntos factoriales: 2^3
 (Nºs. 1 a 8)
 Puntos estrella 2×3
 (Nºs 12 a 17)
 Puntos centrales 3
 (Nºs 9 a 11)
 Total de experiencias 17.

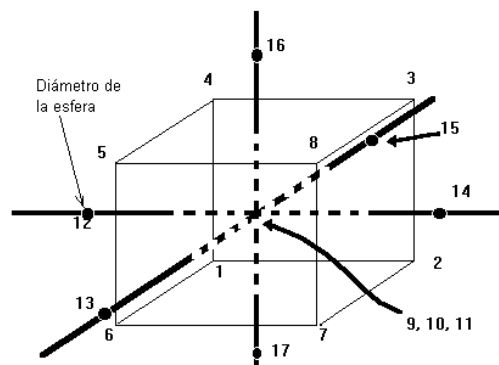


Fig. 14. Diseño rotable compuesto para 3 variables

La que sigue es la matriz correspondiente a las experiencias en tres factores

Prueba Nº	X1	X2	X3	
1	-1	-1	-1	DISEÑO FACTORIAL
2	+1	-1	-1	
3	-1	+1	-1	
4	+1	+1	-1	
5	-1	-1	+1	
6	+1	-1	+1	
7	-1	+1	+1	
8	+1	+1	+1	
9	0	0	0	PUNTO CENTRAL
10	-1,682	0	0	PUNTOS EN ESTRELLA
11	+1,682	0	0	
12	0	-1,682	0	
13	0	+1,682	0	
14	0	0	-1,682	
15	0	0	+1,682	

6 Metodología del Análisis de las superficies de Respuesta

Es la representación gráfica de las variables como respuesta en el espacio de los factores. Tiene el inconveniente de la dificultad de visualización en espacios de más de dos dimensiones pero la gran ventaja es que se identifican fácilmente las tendencias y es fácil localizar el óptimo. Puede requerir herramientas avanzadas de representación.

Hay varios métodos para recorrer experimentalmente la superficie de respuesta. Ya se mencionó el de Simplex EvOp y otras variantes, el de pendientes y tangentes, el de búsqueda por métodos como Fibonacci, etc.

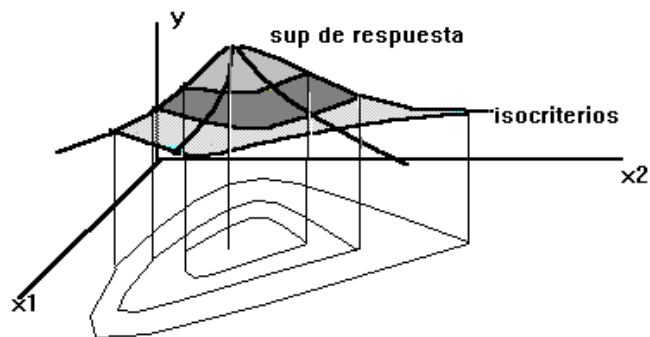


Fig.16

7 Conclusiones

Los diseños experimentales y las búsquedas directas constituyen un buen instrumento para caracterizar y optimizar procesos y formulaciones, aunque tienen algunos límites:

1. resulta difícil encontrar óptimos locales
2. hay que limitarse al área experimental, las extrapolaciones son imprecisas.

8 Manejo estadístico de datos obtenidos en un ensayo

Cualquiera sea el origen de los datos experimentales a analizar (planillas de operación, ensayos factoriales, ensayos rotables), se deben procesar con herramientas estadísticas a fin de poder extraer conclusiones. Una forma es utilizar el análisis de la varianza y de la regresión.

Se comienza por el modelo más simple, un modelo lineal.

$$z = b_0 + b_1 x$$

como solo se debe determinar el valor de b_0 y el de b_1 , lo cual puede obtenerse con solamente dos niveles para la variable x . Estos ensayos deben repetirse para poder discriminar el error experimental.

Este modelo general puede ser escrito de manera equivalente como

$$z = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

donde μ es el valor medio del ensayo,

α es la incidencia del factor utilizado

e es el error experimental

siendo $i = 1, 2, \dots, m$ (réplicas)

$j = 1, 2, \dots, n$ (niveles)

Si se llama γ_{ij} al resultado de una corrida en el nivel j durante la repetición i

y llamando γ_{**} al resultado promedio de todos los ensayos $n.m$

y γ_{i*} al resultado promedio de todos los m ensayos realizados en el nivel j se tiene

$$\gamma_{ij} = \gamma^{**} + (\gamma_{i*} - \gamma^{**}) + (\gamma_{ij} - \gamma_{i*})$$

donde cada uno de los términos representa, respectivamente a μ , α_i y ϵ_{ij} . (Ver página 8)

Se puede obtener un modelo de regresión sobre la base de una serie de datos.

Sea, por ejemplo:

Se realiza un ensayo con un solo factor, temperatura, a un nivel bajo (105°C) y a nivel alto (110°C), con tres repeticiones. Los resultados obtenidos (eficiencias en el ejemplo) se muestran en la siguiente tabla:

		j = 1	j = 2
		Nivel 0	Nivel 1
i=1	Repetición 1	79	90
i=2	Repetición 2	80	91
i=3	Repetición 3	81	89

En primer lugar se reordenan los datos a fin de calcular el modelo lineal y su coeficiente de regresión:

Nivel	Xij
0	79
0	80
0	81
1	90
1	91
1	89

Mediante un paso en planilla de cálculo se puede obtener el gráfico al que se adiciona el análisis de regresión correspondiente. (La curva de regresión calculada aparece en línea gruesa).

El procedimiento es el siguiente:

1. se cargan los datos en una planilla de Excel, en la forma mostrada en la última tabla (Columna Niveles y columna factores)
2. se construye el gráfico con la opción XY - Dispersión, con el formato “puntos unidos por líneas”.
3. Una vez terminado, se edita (doble clic en el área de gráfico) y se hace un clic sobre la línea que une los puntos (se selecciona la línea).
4. Con la línea seleccionada se opta por el menú “Agregar línea de tendencia...” (ver Fig. 22)
5. Se opta por “Regresión Lineal” en la solapa “Opciones...” (ver Fig. 23)

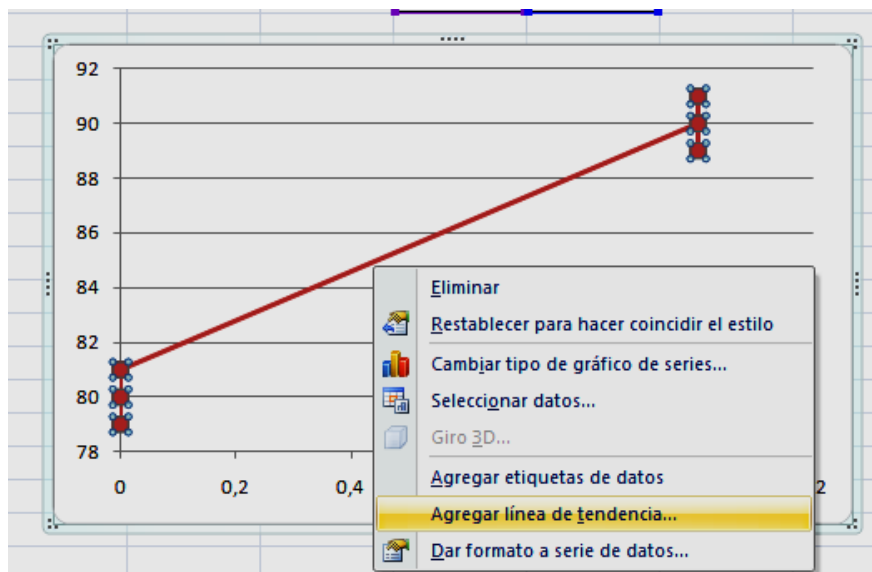


Fig. 22

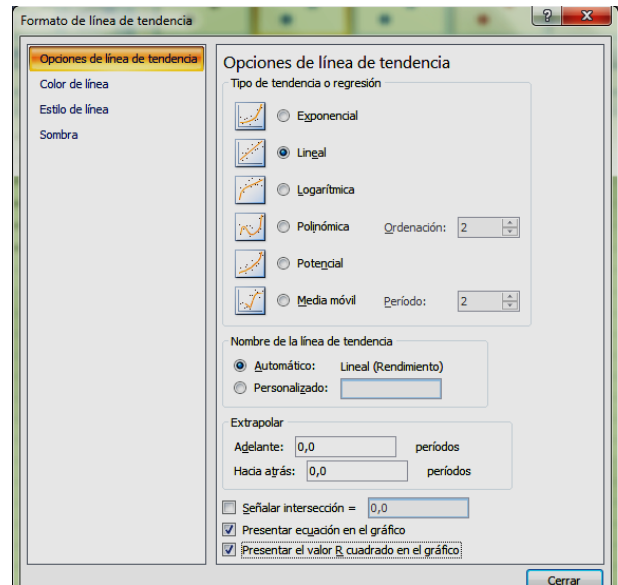


Fig. 23

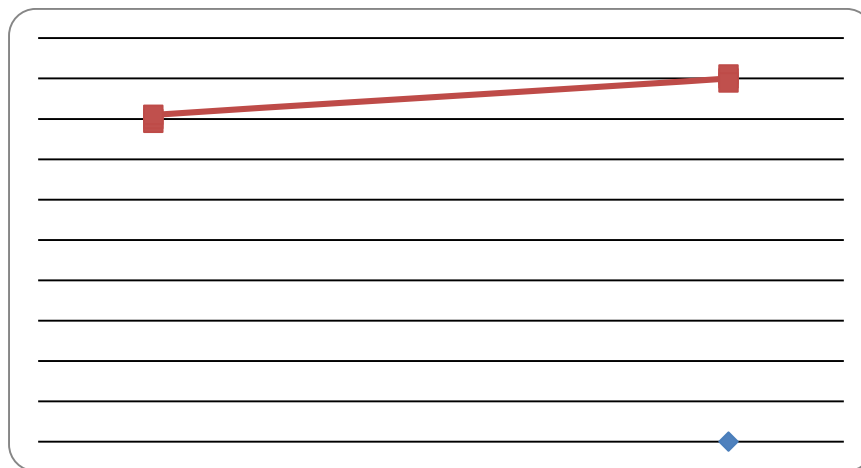


Fig 24. Gráfico sin linea de tendencia

6. Y por último se marcan las casillas “presentar ecuación en el gráfico” y “presentar el valor de R cuadrado...”

Con estos pasos se obtendrá entonces el gráfico y su modelo lineal:

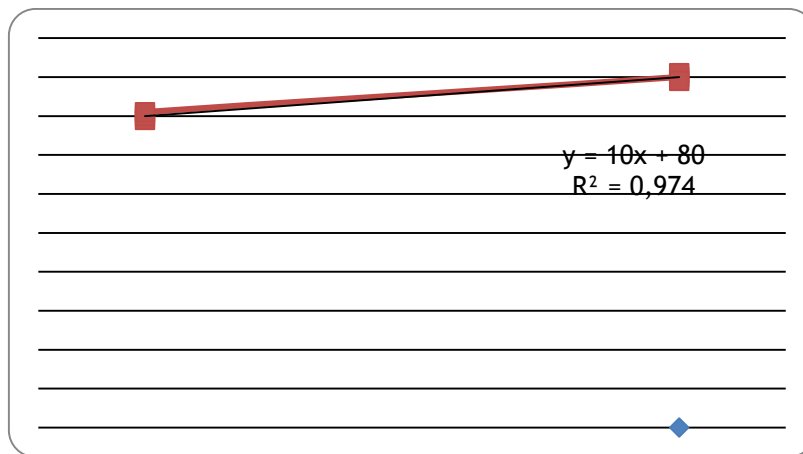


Fig. 25. Gráfico con línea de tendencia

Llevado a la terminología empleada, $b_0 = 80$ y $b_1 = 10$

8.1 Prueba estadística del factor de temperatura

Se debe probar, mediante análisis de varianza, que la variabilidad del factor α_i es significativa frente a la variabilidad del error e_{ij} .

Mediante análisis de la regresión se debe probar que la pendiente $b_1 = 10$ no admite el cero como solución $\beta \neq 0$.

Análisis de varianza

Para efectuar el análisis de varianza con Excel, se parte de los datos cargados en la planilla, agrupados por niveles de ensayo:

	A	B	C	D	E	F
1						
2				j=1	j=2	
3				Nivel 0	Nivel 1	
4		i=1	Repetición 1	79	90	
5		i=2	Repetición 2	80	91	
6		i=3	Repetición 3	81	89	

1. se selecciona el menú Herramientas, el submenú “Análisis de datos...” (Ver fig. 26)

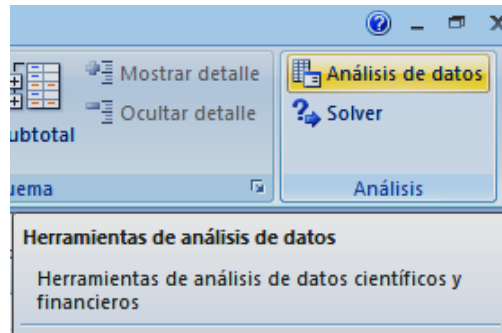


Fig. 26

2. Se selecciona la opción Análisis de varianza para un solo factor. (Fig. 27)

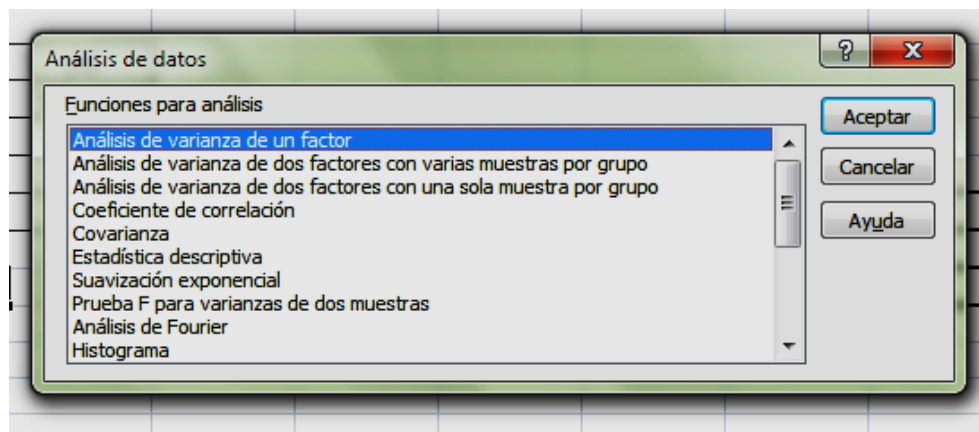


Fig. 27

3. Por último se selecciona el rango de datos (desde celda que contiene “Nivel 0” a celda con “89”; D3 a E6, en el caso de la figura)

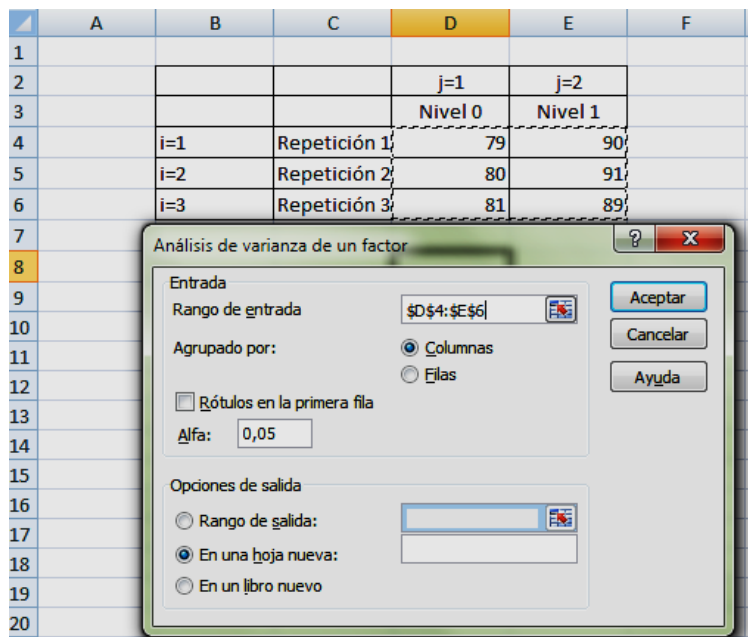


Fig. 28

Con este procedimiento se obtiene una nueva hoja, en la que aparece la siguiente información:

RESUMEN

Grupos	Cuenta	Suma	Promedio	Varianza
Nivel 0	3	240	80	1
Nivel 1	3	270	90	1

ANÁLISIS DE VARIANZA

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Entre grupos	150	1	150	150	0,00025522	7,70864972
Dentro de los grupos	4	4	1			
Total	154	5				

La expresión “entre grupos” indica lo que se ha denominado α (variabilidad del factor). “Dentro de los grupos” indica el error, la variabilidad del error.

La suma de los cuadrados será, entonces,

la expresión $(\gamma_{i*} - \gamma^{**})^2$ para la variabilidad del factor (Entre los grupos)
y la expresión $(\gamma_{ij} - \gamma_{i*})^2$ para el error (Dentro de los grupos)

Al ser 6 ensayos, se disponen 5 grados de libertad. El factor tiene uno y los restantes se asignan al error.

Los cuadrados medios surgen de dividir la suma de cuadrados por los grados de libertad.

El estimador F se calcula dividiendo los cuadrados medios del factor por los del error. Este valor es clásicamente obtenido en tablas de tres entradas: grados de libertad del numerador, grados de libertad del denominador y probabilidad.

La hipótesis nula (H_0) es que las medias de ambos grupos son iguales, por lo tanto la hipótesis a prueba es que no lo son, para ello, se debe cumplir que el valor esperado del numerador sea mayor que el del denominador.

Esto es, para H_0 falso, debe haber un valor grande de F. Llamando a la probabilidad de error p y haciendo $p = 1 - \alpha$. Se considera que la diferencia entre medias es poco significativa si $\alpha = 0,05$ o menos, significativa si $\alpha = 0,01$ o menos y muy significativa si $\alpha = 0,001$ o menos. En este caso, la tabla de Análisis de Varianza presenta un valor de F de 150 (150/1), con un valor crítico para F de 7,7 y una probabilidad (de error) de 0,0002552, que es menor a $\alpha = 0,001$, por lo que el valor de F resulta muy significativo, o, en otras palabras, la probabilidad de la hipótesis nula es muy baja.

Análisis de regresión

Por otro lado, se puede resolver el análisis de regresión a fin de demostrar que la pendiente b_1 no admite el cero como solución en forma similar al análisis de varianza. Para ello, se selecciona la opción “Regresión” en el cuadro de diálogo obtenido en “análisis de datos...”

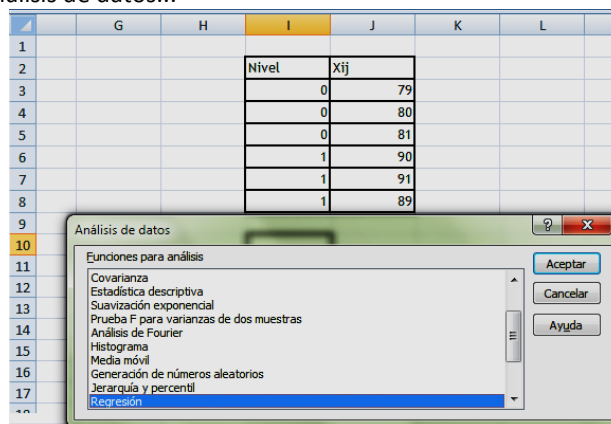


Fig. 29 - A

Los datos a analizar se obtienen de la tabla encolumnada “Niveles”, “X_i” vista en primer lugar.

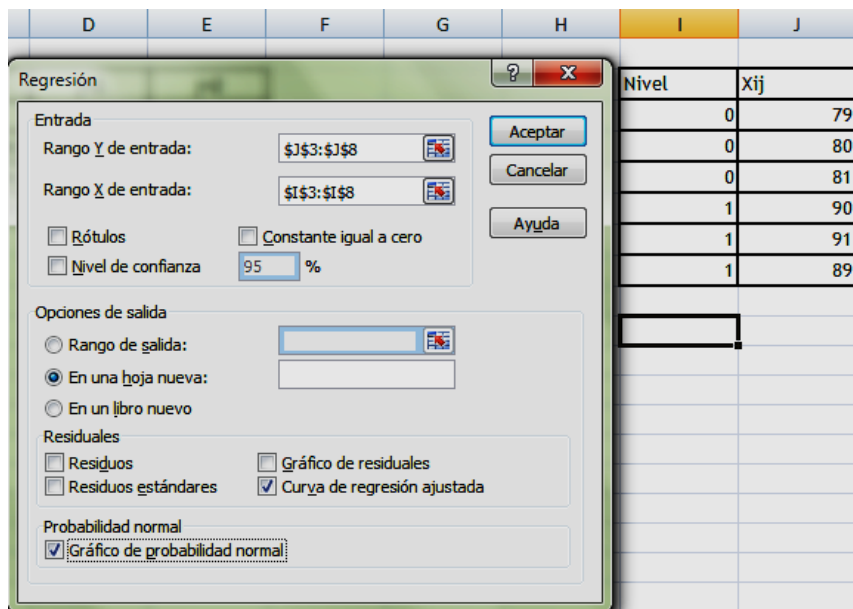


Fig. 29 B

Se obtendrán los siguientes datos, varios de los cuales estaban presentes desde el comienzo del ejemplo, aunque esa presencia no es estrictamente necesaria, ya que todo el cálculo puede realizarse en conjunto.

La primera tabla indica los coeficientes de regresión, el número de observaciones, y el error típico.

La segunda tabla es la que más interesa: obsérvese que es por completo similar a la de análisis de varianza ya vista, pero que difiere en las fuentes de variación.

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0,98692754
Coefficiente de determinación R^2	0,97402597
R^2 ajustado	0,96753247
Error típico	1
Observaciones	6

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	150	150	150	0,00025522
Residuos	4	4	1		
Total	5	154			

En efecto, la primera fila ahora se denomina “Regresión” y representa a la Hipótesis en prueba (“La pendiente es diferente de cero”). Otra vez la probabilidad de error merece alta confianza (H_0 es improbable)